Übungsblatt 11
(für die 27. Kalenderwoche 2008)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Sommersemester 2008

Magdeburg, 24. Juni 2008

1. Es sei $G = (\{E\}, \{a, +, *,), (\}, P, E)$ eine kontextfreie Grammatik mit

$$P = \{E \to E + E,\ E \to E * E,\ E \to (E),\ E \to a\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist.
   b) Geben Sie für $L(G)$ eine Grammatik an, die nicht mehrdeutig ist.

2. Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

   Gegeben eine kontextfreie Grammatik G, ist G mehrdeutig?

   Hinweis: Reduzieren Sie das Postsche Korrespondenzproblem auf dieses Problem: Gegeben ist eine Instanz $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ für ein $k \geq 0$ des Postschen Korrespondenzproblems $P \subseteq X^+ \times X^+$. Es seien $a_1, \ldots, a_k$ Symbole, die nicht zu X gehören, und es sei $T = X \cup \{a_1, \ldots, a_k\}$. Es seien $G_1 = (\{S_1\}, T, P_1, S_1)$ die kontextfreie Grammatik mit

$$P_1 = \{S_1 \to a_i S_1 x_i^R \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{S_1 \to a_i x_i^R \mid i = 1, \ldots, k\}$$

   und $G_2 = (\{S_2\}, T, P_2, S_2)$ die kontextfreie Grammatik mit

$$P_2 = \{S_2 \to a_i S_2 y_i^R \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{S_2 \to a_i y_i^R \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

   Betrachten Sie nun die Grammatik $G = (\{S, S_1, S_2\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1,\ S \to S_2\}, S)$.

   Wir geben hier nochmal die Definition und ein Lemma zur Reduzierbarkeit:

   Definition: Es seien $L_1 \subseteq X_1^*$ und $L_2 \subseteq X_2^*$ zwei Sprachen. Wir sagen, dass L_1 auf L_2 *reduzierbar* ist, falls eine Funktion $\tau \colon X_1^* \to X_2^*$ existiert, so dass gilt

   i) τ ist berechenbar,
   ii) für alle $a \in X^*$ gilt: $a \in L_1 \iff \tau(a) \in L_2$.

   Lemma: Es seien $L_1 \subseteq X_1^*$ und $L_2 \subseteq X_2^*$ zwei Sprachen. Wenn L_1 auf L_2 reduzierbar ist und L_2 entscheidbar ist, dann ist auch L_1 entscheidbar.

3. Gegeben sind folgende Probleme:

   Sum of Subset (*SOS*):

Gegeben:	$m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $a_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq m$, $b \in \mathbb{N}$.
Frage:	Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$?

   Set Partition (*SP*):

Gegeben:	$m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $a_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq m$.
Frage:	Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

   a) Beweisen Sie, dass *SP* polynomial auf *SOS* reduzierbar ist.
   b)* Beweisen Sie, dass *SOS* polynomial auf *SP* reduzierbar ist.

4. Gegeben ist folgendes Problem:

   Knapsack:

Gegeben:	$m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq m$, $G, K \in \mathbb{N}$.
Frage:	Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i \leq G$ und $\sum_{i \in I} b_i \geq K$?

   a) Beweisen Sie, dass *SOS* polynomial auf *Knapsack* reduzierbar ist.
   b)* Beweisen Sie, dass *Knapsack* polynomial auf *SP* reduzierbar ist.

*Diese Aufgabe zählt nicht zu den zu votierenden Aufgaben.