Theoretische Informatik II (Bachelor)

Übungsblatt 1
(für die 15. Kalenderwoche 2008)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Sommersemester 2008

Magdeburg, 1. April 2008

1. Man zeige: Für $n \geq 0$ und $k \geq 0$ sind die Funktionen $c_k^n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, definiert durch

   $$c_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$$

   primitiv-rekursiv.

2. Man zeige: Die zweistelligen Funktionen max, min, pot, geq und eq sind primitiv-rekursiv, wobei wir für $x, y \in \mathbb{N}$

   $$\mathrm{pot}(x,y) = x^y,$$
   $$\mathrm{geq}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq y, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
   $$\mathrm{eq}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   definieren.

3. Es sei $g \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

   $$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{x_{k+1}} g(x_1, \dots, x_k, i)$$

   ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

4. Es seien $\mathrm{geh} \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ und $\mathrm{hah} \colon \mathbb{N}^{\ell} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursive Funktionen. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\mathrm{eff} \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

   $$\mathrm{eff}(n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell}) = \mathrm{geh}(n_1, \dots, n_j, \mathrm{hah}(n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell}), n_{j+1}, \dots, n_k)$$

   ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

5. Bestimmen Sie die folgenden partiell-rekursiven Funktionen f, g, h:

   $$\begin{aligned} f(0) &= \mathrm{S}(\mathrm{Z}) \\ f(y+1) &= \mathrm{P}(\mathrm{P}_2^2(y, f(y))) \\ g(0) &= \mathrm{Z} \\ g(y+1) &= f(\mathrm{P}_2^2(y, g(y))) \\ h(x) &= \mu y[\mathrm{add}(g(\mathrm{P}_1^2(x,y)), \mathrm{P}_2^2(x,y))] \end{aligned}$$