Spezielle Äquivalenzrelationen

Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ bezeichnen wir die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim$ als Index von $\sim$ und bezeichnen sie mit $Ind(\sim)$. Die Äquivalenzrelation $\sim$ hat *endlichen Index*, falls $Ind(\sim)$ endlich ist.

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge X^* heißt *Rechtskongruenz*, falls für beliebige Wörter $x, y \in X^*$ und $a \in X$ aus $x \sim y$ auch $xa \sim ya$ folgt.

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X^* heißt *Verfeinerung* der Menge $R \subseteq X^*$, wenn für beliebige Wörter $x, y \in X^*$ aus $x \sim y$ folgt, dass $x \in R$ genau dann gilt, wenn auch $y \in R$ gilt.

Wir nennen eine Äquivalenzrelation $\sim$ eine *R-Relation*, falls sie eine Rechtkongruenz mit endlichem Index ist und eine Verfeinerung von R ist.

Satz von Myhill/Nerode

Satz:
Für eine Sprache $R \subseteq X^*$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- R ist regulär.
- Es gibt eine R-Relation.
- Die Relation $\sim_R$ hat endlichen Index.

Folgerung:
Es sei R eine beliebige Sprache. Dann gilt für jede R-Relation $\sim$, dass $Ind(\sim) \geq Ind(\sim_R)$.

Minimale Automaten I

Für einen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, F)$ und eine reguläre Sprache R setzen wir

$$\begin{aligned} z(\mathcal{A}) &= \#(Z), \\ z(R) &= \min\{z(\mathcal{A}) \mid T(\mathcal{A}) = R\}. \end{aligned}$$

Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ *minimaler* Automat für R ist, falls $T(\mathcal{A}) = R$ und $z(\mathcal{A}) = z(R)$ gelten.

Satz:
Für eine reguläre Sprache R gilt $z(R) = Ind(\sim_R)$.

Minimale Automaten II

Es sei $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat. Für $z \in Z$ und $z' \in Z$ setzen wir $z \approx_{\mathcal{A}} z'$ genau dann, wenn für alle $x \in X^*$ genau dann $\delta^*(z, x)$ in F liegt, wenn auch $\delta^*(z', x)$ in F liegt.

$\approx_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Zustände des Automaten $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}_\approx = (X, Z_\approx, K_\approx(z_0), \delta_\approx, F_\approx)$ sei Automat mit
$K_\approx(z)$ – Äquivalenzklasse von $z \in Z$ bezüglich $\approx (= \approx_{\mathcal{A}})$,
$Z_\approx = \{K_\approx(z) \mid z \in Z\}$,
$F_\approx = \{K_\approx(z) \mid z \in F\}$,
$\delta_\approx(K_\approx(z), a) = K_\approx(\delta(z, a))$.

Satz: Für jeden Automaten $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}_\approx$ minimaler Automat für $T(\mathcal{A})$.

Reduktionsalgorithmus

1. Erstelle eine Liste aller Paare (z, z') von Zuständen $z \in Z$ und $z' \in Z$.

2. Streiche ein Paar (z, z') falls entweder $z \in F$ und $z' \notin F$ oder $z \notin F$ und $z' \in F$ gilt.

3. Führe die folgende Aktion solange aus, bis keine Streichungen mehr in der Liste möglich sind: Falls für ein Paar (z, z') und ein $a \in X$ das Paar $(\delta(z, a), \delta(z', a))$ nicht in der Liste ist, so streiche (z, z').

Lemma: Es seien $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat und $z \in Z$ und $z' \in Z$ zwei Zustände des Automaten. Dann ist das Paar (z, z') genau dann in der durch den Reduktionsalgorithmus erzeugten Liste enthalten, wenn $z \approx_{\mathcal{A}} z'$ gilt.

Eindeutigkeit des minimalen Automaten

Definition:
Zwei Automaten $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}' = (X, Z', z_0', \delta', F')$ heißen isomorph, wenn es eine eineindeutige Funktion φ von Z auf Z' mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $\varphi(z_0) = z_0'$.
- Für $z \in Z$ gilt $z \in F$ genau dann, wenn auch $\varphi(z) \in F'$ gilt.
- Für alle $z \in Z$ und $a \in X$ gilt $\delta'(\varphi(z), a) = \varphi(\delta(z, a))$.

Satz:
Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei minimale Automaten für die reguläre Menge R, so sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ isomorph.