Abschluss unter Operationen – Definition

Definition:
Es seien $\mathcal{L}$ eine Menge von Sprachen und τ eine n-stellige Operation, die über Sprachen definiert ist. Dann heißt $\mathcal{L}$ abgeschlossen unter τ, wenn für beliebige Sprachen $L_1, L_2, \ldots L_n \in \mathcal{L}$ auch

$$\tau(L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathcal{L}$$

gilt.

Abschluss unter mengentheoretischen Operationen – Resultate

Lemma:
$\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind abgeschlossen unter der (üblichen) Vereinigung von Sprachen.

Lemma:
$\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind abgeschlossen unter Durchschnitt, und $\mathcal{L}(CF)$ ist gegenüber Durchschnitt nicht abgeschlossen.

Lemma:
i) $\mathcal{L}(REG)$ und $\mathcal{L}(CS)$ sind abgeschlossen bezüglich Komplement.
ii) $\mathcal{L}(CF)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind nicht abgeschlossen unter Komplement.

Abschluss unter algebraischen Operationen

Lemma:
$\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind unter Produkt abgeschlossen.

Lemma:
$\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind abgeschlossen gegenüber der Bildung des (positiven) Kleene-Abschlusses.

Homomorphismen

Definition: Es seien X und Y zwei Alphabete. Ein Homomorphismus h von X^* in Y^* ist eine eindeutige Abbildung von X^* in Y^*, bei der $h(w_1w_2) = h(w_1)h(w_2)$ für beliebige Wörter w_1 und w_2 aus X^* gilt.

Ein Homomorphismus heißt nichtlöschend, wenn für alle Wörter $w \neq \lambda$ auch $h(w) \neq \lambda$ gilt.

Definition: Es seien X und Y zwei Alphabete, $L \subseteq X^*$ und $L' \subseteq Y^*$ zwei Sprachen und h ein Homomorphismus von X^* in Y^*. Dann setzen wir

$$h(L) = \{h(w) \mid w \in L\} \quad \text{und} \quad h^{-1}(L') = \{w \mid w \in X^*,\ h(w) \in L'\}.$$

Abschluss unter gewissen Operationen – Definition

Wir sagen, dass eine Familie $\mathcal{L}$ von Sprachen unter (nichtlöschenden) Homomorphismen abgeschlossen ist, wenn für beliebige Alphabete X und Y, beliebige Sprachen $L \subseteq X^*$ und jeden (nichtlöschenden) Homomorphismusn $h : X^* \to Y*$ aus $L \in \mathcal{L}$ auch $h(L) \in \mathcal{L}$ folgt.

Wir sagen, dass eine Familie $\mathcal{L}$ von Sprachen unter inversen Homomorphismen abgeschlossen ist, wenn für beliebige Alphabete X und Y, beliebige Sprachen $L \subseteq Y^*$ und beliebige Homomorphismen $h : X^* \to Y*$ aus $L \in \mathcal{L}$ auch $h^{-1}(L) \in \mathcal{L}$ folgt.

Wir sagen, dass eine Familie $\mathcal{L}$ von Sprachen unter Durchschnitten mit regulären Sprachen abgeschlossen ist, wenn für eine beliebige Sprache $L \in \mathcal{L}$ und eine beliebige reguläre Sprache R auch $L \cap R \in \mathcal{L}$ gilt.

Abschluss unter gewissen Operationen – Resultate

Lemma:
i) Die Sprachfamilien $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind unter Homomorphismen abgeschlossen, $\mathcal{L}(CS)$ ist nicht unter Homomorphismen abgeschlossen.

ii) Die Sprachfamilien $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind unter nichtläschenden Homomorphismen abgeschlossen.

iii) Die Sprachfamilien $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind unter inversen Homomorphismen abgeschlossen.

Lemma:
Die Sprachfamilien $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(CS)$ und $\mathcal{L}(RE)$ sind unter Durchschnitten mit regulären Sprachen abgeschlossen.

Zusammenfassung

	$\mathcal{L}(RE)$	$\mathcal{L}(CS)$	$\mathcal{L}(CF)$	$\mathcal{L}(REG)$
Vereinigung	+	+	+	+
Durchschnitt	+	+	−	+
Komplement	−	+	−	+
Produkt	+	+	+	+
(positiver) KLEENE-Abschluss	+	+	+	+
Homomorphismen	+	−	+	+
nichtlöschende Homomorphismen	+	+	+	+
inverse Homomorphismen	+	+	+	+
Durchschnitt mit regulären Mengen	+	+	+	+

Abstrakte Familien von Sprachen – Definition

Definition:
Eine Menge $\mathcal{L}$ von Sprachen heißt abstrakte Familie von Sprachen (kurz AFL),

- wenn sie mindestens eine nichtleere Sprache enthält und
- wenn sie unter Vereingung, Produkt, Kleene-Abschluss, nichtlöschenden Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Sprachen abgeschlossen ist.

Die Menge $\mathcal{L}$ heißt volle AFL, wenn sie zusätzlich unter (beliebigen) Homomorphismen abgeschlossen ist.

Abstrakte Familien von Sprachen – Resultate

Satz: Für jede volle AFL $\mathcal{L}$ gilt $\mathcal{L}(REG) \subseteq \mathcal{L}$.

Folgerung: Die Menge $\mathcal{L}(REG)$ ist die (bez. der Inklusion) kleinste volle AFL.

Satz: Jede AFL ist unter mengentheoretischer Subtraktion regulärer Mengen abgeschlossen.

Definition: Es seien X und Y Alphabete. Für jeden Buchstaben $a \in X$ sei $\sigma(a)$ eine Sprache über Y. Für eine Sprache $L \subseteq X^*$ definieren die Sprache $\sigma(L) \subseteq Y^*$ durch

$$\sigma(L) = \{w_1w_2 \dots w_n \mid a_1a_2 \dots a_n \in L,\ a_i \in X \text{ und } w_i \in \sigma(a_i) \text{ für } 1 \leq i \leq n,\ n \geq 0\}.$$

Satz: Jede volle AFL ist unter Substitutionen mit regulären Sprachen abgeschlossen.

Entscheidungsprobleme bei formalen Sprachen

Leerheitsproblems für kontextfreie Sprachen:

Gegeben:	kontextfreie Grammatik G	oder	Gegeben:	Kellerautomat $\mathcal{M}$
Frage:	Ist $L(G)$ leer ?		Frage:	Ist $T(\mathcal{M})$ leer ?

Endlichkeitsproblem: Gegeben: Grammatik G
Frage: Ist $L(G)$ endlich ?

Äquivalenzproblem Gegeben: Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

Mitgliedsproblem Gegeben: Grammatik $G = (N, T, P, S)$ und Wort $w \in T^*$
Frage : Ist w in $L(G)$ enthalten ?

Endlichkeits–, Leerheits– und Äquivalenzproblem – Resultate

Satz: Das Leerheits- und das Endlichkeitsproblem sind für beliebige Regelgrammatiken und monotone (kontextsensitive) Grammatiken unentscheidbar.

Satz: Für kontextfreie Grammatiken sind das Leerheits- und Endlichkeitsproblem in der Zeit $O(\#(V) \cdot \sum_{A\to\beta\in P}(|\beta|+2))$ entscheidbar.

Satz: Das Äquivalenzproblem ist für kontextfreie Grammatiken unentscheidbar.

Satz: Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ ist in der Zeit $O(n \cdot k^2)$ mit $n = max\{\#(N_1), \#(N_2)\}$ und $k = max\{\sum_{A\to\alpha\in P_1}(|\alpha|+2), \sum_{B\to\beta\in P_2}(|\beta|+2)\}$ entscheidbar.

Beweis der Unentscheidbarkeit des Äquivalenzproblems bei kontextfreien Sprachen

$G_1 = (N, T \cup \{c\}, P, S)$ und $G_2 = (N \cup \{S', S''\}, T \cup \{c\}, P \cup P', S')$

$$
\begin{aligned}
N &= \{S, S_u, S_r, S_l\}\ , \\
P &= \{S \to xSx : x \in T\} \cup \{S \to xS_l, S \to S_r x\} \cup \{S \to xS_u y : x, y \in T, x \neq y\} \\
&\qquad \cup \{S_u \to xS_u y : x, y \in T\} \cup \{S_u \to S_r, S_u \to S_l\} \\
&\qquad \cup \bigcup_{x \in T} \{S_l \to xS_l, S_r \to S_r x\} \\
&\qquad \cup \{S_u \to c, S_l \to c, S_r \to c\}, \\
P' &= \{S' \to S, S' \to S''\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{S'' \to u_i S'' v_i^R, S'' \to u_i c v_i^R\}
\end{aligned}
$$

$$L(G_1) = \{\alpha c \beta^R : \alpha, \beta \in T^+, \alpha \neq \beta\}$$

$$L(G_2) = L(G_1) \cup \{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} c v_{i_k} v_{i_{k-1}} \dots v_{i_1} : k \geq 1, 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

Entscheidbarkeit bei formalen Sprachen – Zusammenfassung

	$\mathcal{L}(REG)$	$\mathcal{L}(CF)$	$\mathcal{L}(CS)$	$\mathcal{L}(RE)$
Mitgliedsproblem	$+$	$+$	$+$	$-$
Leerheitsproblem	$+$	$+$	$-$	$-$
Endlichkeitsproblem	$+$	$+$	$-$	$-$
Äquivalenzproblem	$+$	$-$	$-$	$-$