Literatur – Lindenmayer Systems

A. Lindenmayer, Mathematical models for cellular interaction in development I and II. *J. Theoret. Biol.* **18** (1968) 280–315.

G.T. Herman and G. Rozenberg, *Developmental Systems and Languages*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975.

G. Rozenberg and A.Salomaa, *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, New York, 1980.

L. Kari, G. Rozenberg and A. Salomaa, L systems. In: G. Rozenberg and A. Salomaa (eds.), *Handbook of Formal Languages*, Springer-Verlag, 1997, Vol. I, Chapter 5, 253–328.

P. Pruzinkiewicz and A. Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Alphabete, Wörter, Sprachen I

Alphabet — nichtleere endliche Menge
Buchstabe — Element eines Alphabets

Wort (über V) — (endliche) Folge von Buchstaben (aus V)
λ — Leerwort

V^* (bez. V^+) — Menge aller (nichtleeren) Wörter über V

Produkt (Konkatenation) von Wörtern — Hintereinanderschreiben von Wörtern

v Teilwort von w — $w = x_1vx_2$ für gewisse $x_1, x_2 \in V^*$
v Präfix von w — $w = vx$ für ein gewisses $x \in V^*$
v Suffix of w — $w = xv$ für ein gewisses $x \in V^*$

Alphabete, Wörter, Sprachen II

$\#_a(w)$ — Anzahl der Vorkommen des Buchstaben a im Wort w

$|w| = \sum_{a \in V} \#_a(w)$ — Länge des Wortes $w \in V^*$

$\Psi(w) = (\#_{a_1}(w), \#_{a_2}(w), \dots, \#_{a_n}(w))$ —
Parikh-Vektor des Wortes $w \in V^*$, $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Sprache (über V) — Teilmenge von V^*

Festlegung: Sprachen L_1 and L_2 sind genau dann gleich (geschrieben als $L_1 = L_2$) wenn L_1 and L_2 sich höchstens im Leerwort unterscheiden
d.h. $L_1 \setminus \{\lambda\} = L_2 \setminus \{\lambda\}$ (mit üblicher Gleichheit von Mengen)

Grammatiken I

Regelgrammatik — $G = (N, T, P, S)$,
N – Alphabet/Menge der Nichtterminale,
T – Alphabet/Menge der Terminale,
$V_G = N \cup T$, $N \cap T = \emptyset$,
P – Menge der Regeln/Produktionen,
endliche Teilmenge von $(V^* \setminus T^*) \times V^*)$,
Regeln werden als $\alpha \to \beta$ geschrieben,
$S \in N$ – Axiom/Startsymbol

direkte Ableitung $x \Longrightarrow_G y$ — $x = x_1 \alpha x_2$, $y = x_1 \beta x_2$, $\alpha \to \beta \in P$,

$\Longrightarrow_G^*$ reflexiver und transitiver Abschluss von $\Longrightarrow_G$

$L(G) = \{z \mid z \in T^*$ und $S \Longrightarrow_G^* z\}$

Grammatiken II

G heißt genau dann monoton, wenn alle Regeln aus P die Form $\alpha \to \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$ haben.

G heißt genau dann kontextabhängig, wenn alle Regeln aus P die Form $uAv \to uwv$ mit $A \in N$, $w \in V^+$, $u, v \in V^*$ haben.

G heißt genau dann kontextfrei, wenn alle Regeln aus P die Form $A \to w$ mit $A \in N$ and $w \in V^*$ haben.

G heißt genau dann regulär, wenn alle Regeln aus P die Form $A \to wB$ oder $A \to w$ mit $A, B \in N$ und $w \in T^*$ haben.

Grammatiken III

REG, CF, CS, MON and RE — Familien regulärer, kontextfreier, kontextabhängiger, monotoner und beliebiger (Regel-) Grammatiken,

Eine Sprache L heißt genau dann X, wenn $L = L(G)$ für eine X Grammatik G gilt.

$\mathcal{L}(X)$ — Familie der Sprachen, die von Grammatiken aus X erzeugt werden

$\mathcal{L}(FIN)$ — Familie der endlichen Sprachen

$\mathcal{L}(FIN) \subset \mathcal{L}(REG) \subset \mathcal{L}(CF) \subset \mathcal{L}(CS) = \mathcal{L}(MON) \subset \mathcal{L}(RE)$
($\mathcal{L}(RE)$ ist die Familie der rekursiv-aufzählbaren Sprachen)

Platzbedarf von Grammatiken

$G = (N, T, P, S)$ — Regelgrammatik

$D : S \Longrightarrow w_1 \Longrightarrow w_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow w_r = w$ — Ableitung von $w \in T^*$ in G

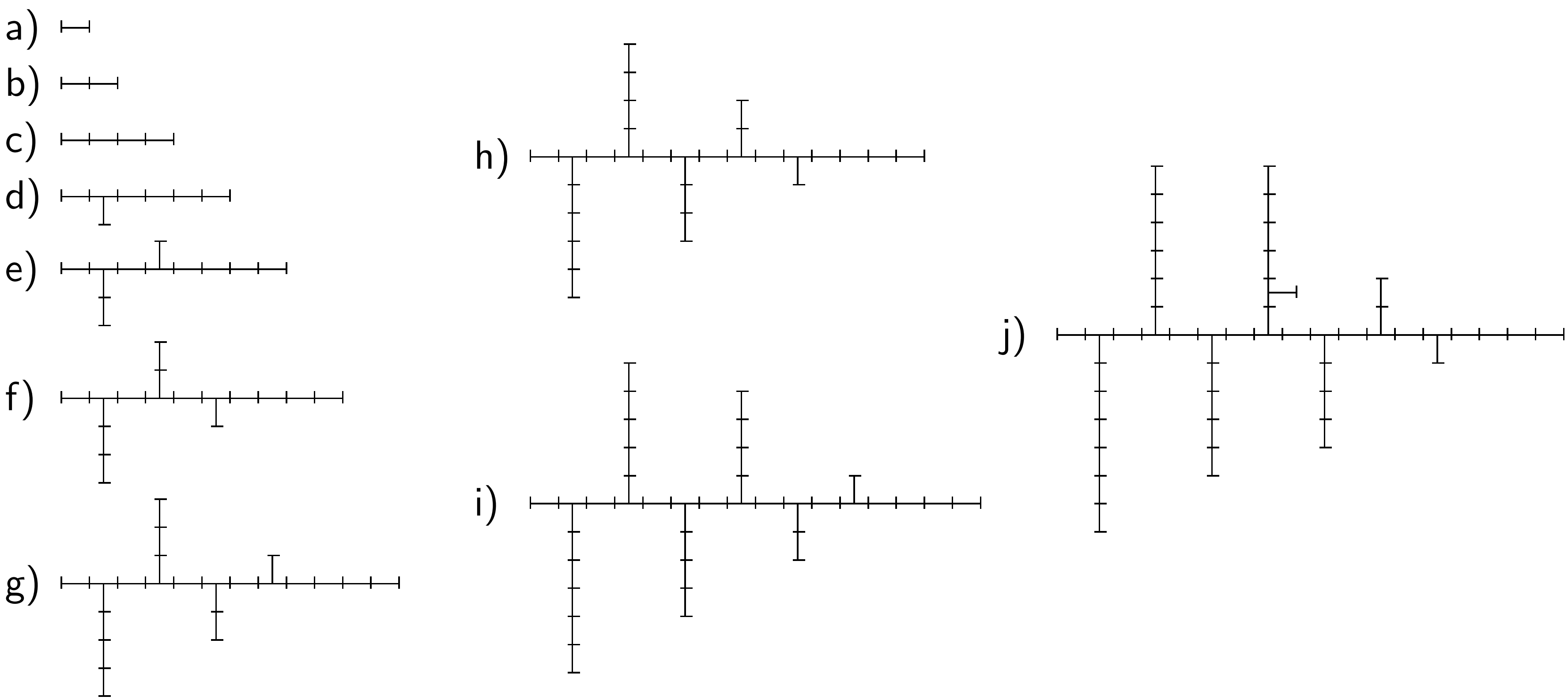
Platzbedarf von w bez. D — $Ws_G(w, D) = max\{|w_i| \mid 1 \leq i \leq r\}$

Platzbedarf von w —

$$Ws_G(w) = \min\{ Ws_G(w, D) \mid D \text{ ist eine Ableitung von } w \text{ in } G\},$$

Satz über den Platzbedarf:
Es seien $G = (N, T, P, S)$ eine Regelgrammatik und k eine positive ganze Zahl. Wenn $Ws_G(w) \leq k|w|$ für alle Wörter $w \in L(G)$ gilt, so ist $L(G)$ eine kontextabhängige Sprache.

Entwicklung einer Alge I



Entwicklung einer Alge II

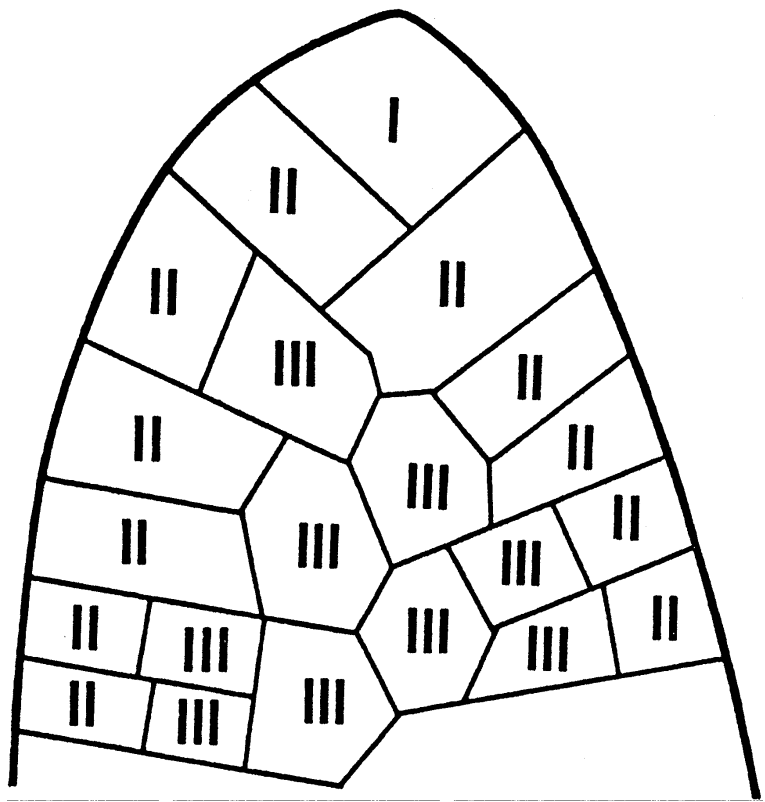
a) c
b) cc
c) $cccc$
d) $cc(c)cccc$
e) $cc(cc)cc(c)cccc$
f) $cc(ccc)cc(cc)cc(c)cccc$
g) $cc(cccc)cc(ccc)cc(cc)cc(c)cccc$
h) $cc(ccccc)cc(cccc)cc(ccc)cc(cc)cc(c)cccc$
i) $cc(cccccc)cc(ccccc)cc(cccc)cc(cccc)cc(cc)cc(c)cccc$
j) $cc(ccccccc)cc(cccccc)cc(ccccc)cc(cc(c)cccc)cc(cccc)cc(cc)cc(c)cccc$

Entwicklung einer Alge III

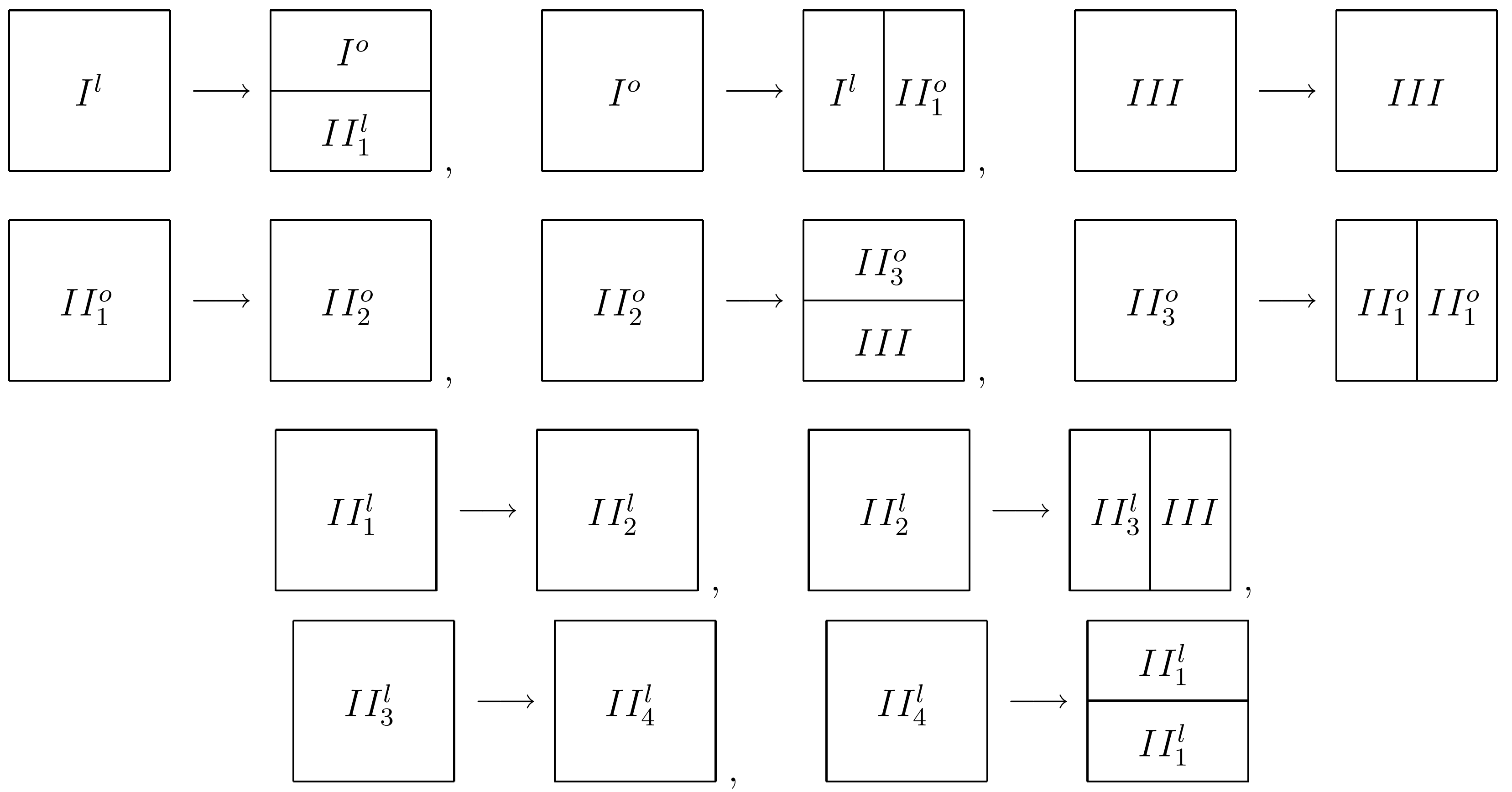
$$\begin{array}{lllll} 0 \rightarrow 10 & 1 \rightarrow 32 & 2 \rightarrow 3(4) & 3 \rightarrow 3 & 4 \rightarrow 56 \\ 5 \rightarrow 37 & 6 \rightarrow 58 & 7 \rightarrow 3(9) & 8 \rightarrow 50 & 9 \rightarrow 39 \end{array}$$

a) 4
b) 56
c) 3758
d) $33(9)3750$
e) $33(39)33(9)3710$
f) $33(339)33(39)33(9)3210$
g) $33(3339)33(339)33(39)33(4)3210$
h) $33(33339)33(3339)33(339)33(56)33(4)3210$
i) $33(333339)33(33339)33(3339)33(3758)33(56)33(4)3210$
j) $33(3333339)33(333339)33(33339)33(33(9)3750)33(3758)33(56)33(4)3210$

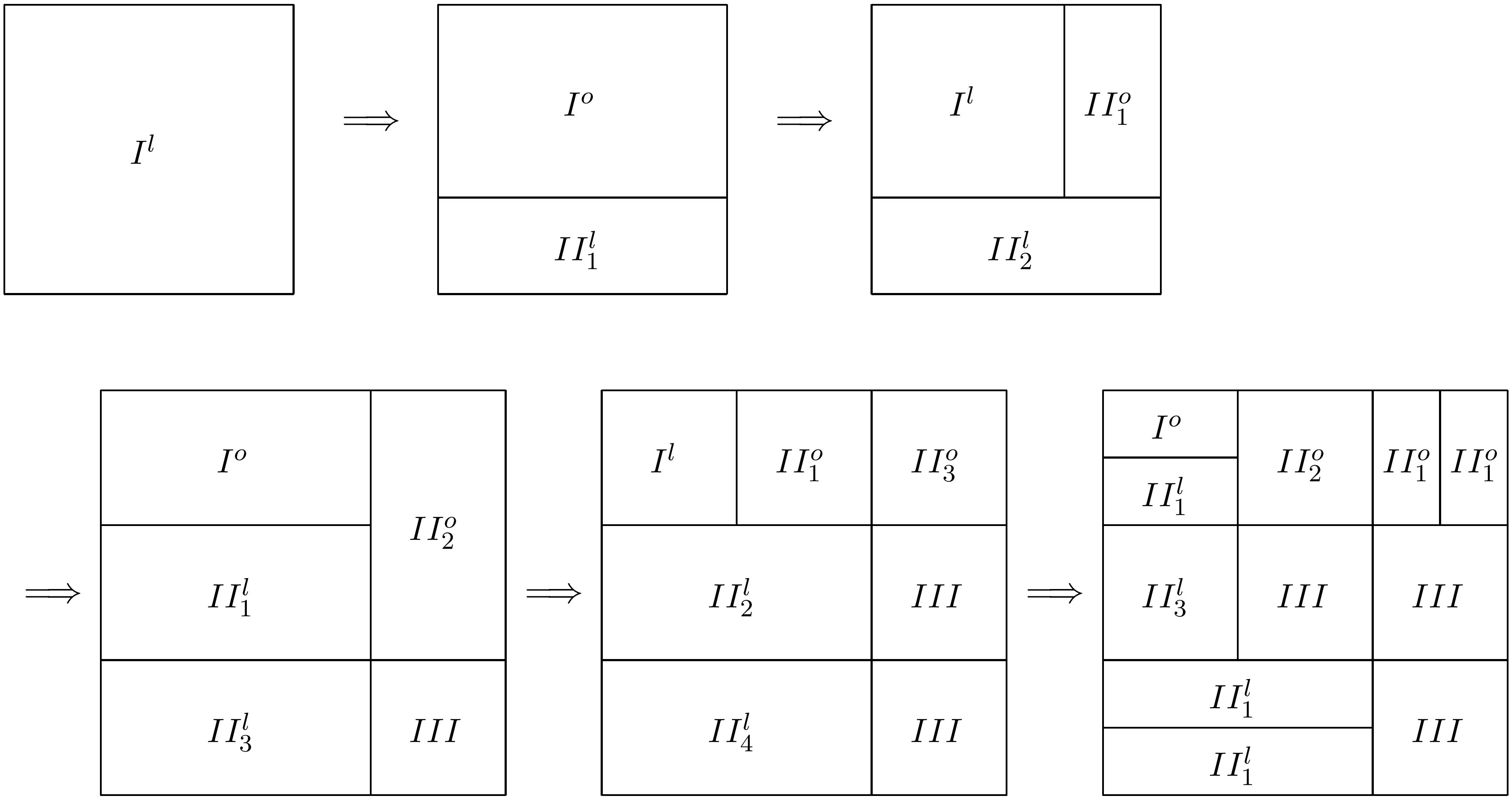
Phascum Cuspidatum I



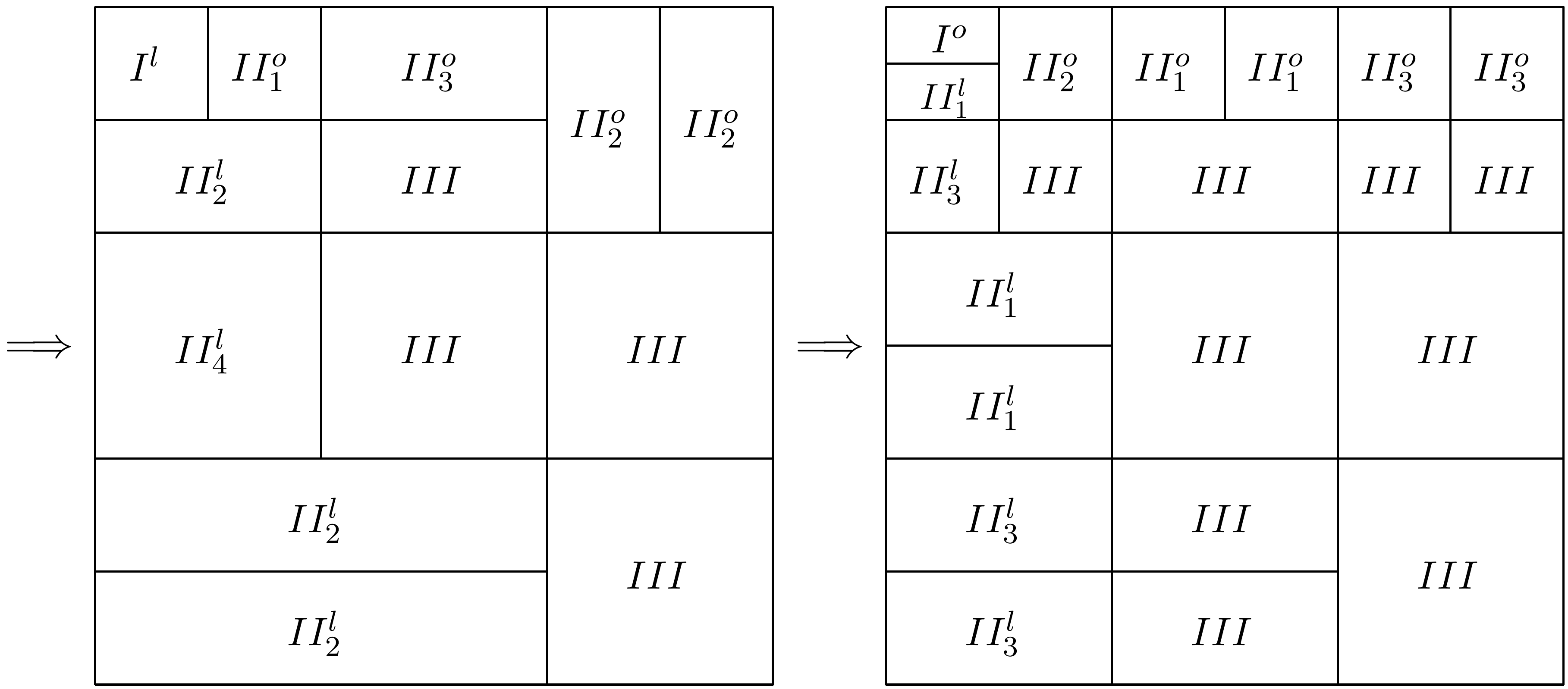
Phascum Cuspidatum II



Phascum Cuspidatum III



Phascum Cuspidatum IV



0L-Systeme – Definitionen I

Definition:
Ein *Lindenmayer-System ohne Interaktion* (abgekürzt durch 0L-System) ist ein Tripel $G = (V, P, \omega)$ wobei

- V ein Alphabet ist,
- P eine vollständige Menge von Regeln über V ist,
  d.h., P ist eine endliche Teilmenge von $V \times V^*$ und
  für jeden Buchstaben $a \in V$ gibt es ein Wort w_a mit $(a, w_a) \in P$,
- $\omega \in V^+$.

anstelle von (a, w) schreiben wir $a \to w$

0L-Systeme – Definitionen II

Definition:
Es seien $G = (V, P, \omega)$ ein 0L-System und $x \in V^+$ und $y \in V^*$ zwei Wörter über V.
Wir sagen, dass x *direkt* y *in* G *ableitet*
(geschrieben als $x \Longrightarrow_G y$, oder $x \Longrightarrow y$, falls G aus dem Kontext klar ist) wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $x = x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in V$ für $1 \leq i \leq n$,
- $y = y_1 y_2 \dots y_n$,
- $x_i \rightarrow y_i \in P$ für $1 \leq i \leq n$.

Wir setzen $\lambda \Longrightarrow_G \lambda$.

0L-Systeme – Definitionen III

$\Longrightarrow^*$ bezeichnet den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Longrightarrow$

Definition:
Es sei $G = (V, P, \omega)$ ein 0L-System.
Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ ist durch

$$L(G) = \{z \mid \omega \Longrightarrow^* z\}$$

definiert.

$L_0(G) = \{\omega\}$,
$L_n(G) = \{z \mid v \Longrightarrow z$ für ein $v \in L_{n-1}(G)\}$, $n \geq 1$,
$L(G) = \bigcup_{n\geq 0} L_n(G)$,

0L Systeme — Beispiele

$G_1 = (\{a\}, \{a \to a^2\}, a)$
$L(G_1) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$,

$G_2 = (\{a, b\}, \{a \to \lambda, b \to ab\}, aab)$
$L(G_2) = \{aab, ab\}$,

$G_3 = (\{a\}, \{a \to a, a \to a^2\}, a)$
$L(G_3) = \{a^n \mid n \geq 1\}$,

$G_4 = (\{a, b, c, d, e\}, \{a \to a, b \to ba, c \to cbb, d \to da, e \to cbbd\}, e)$
$L(G_4) = \{e\} \cup \{cbbbababa^2ba^2 \ldots ba^nba^nda^n \mid n \geq 0\}$,

$G_5 = (\{a, b, c\}, \{a \to a^2, b \to ab, c \to bc, c \to c\}, abc)$
$$L(G_5) = \{a^{2^n-1}ba^{2^{n_1}-1}ba^{2^{n_2}-1}b \ldots a^{2^{n_r}-1}bx \mid n > n_1 > n_2 > \ldots n_r > 1, r \geq 0, x \in \{c, bc\}\}$$

Spezielle 0L Systeme

Definition:

Ein 0L-System $G = (V, P, \omega)$ heißt *fortpflanzend* (engl. propagating, kurz P0L-System) wenn aus $a \to w \in P$ die Beziehung $w \neq \lambda$ folgt.

Ein 0L-System $G = (V, P, \omega)$ heißt *deterministisch* (kurz D0L-System) wenn für jedes $a \in V$ aus $a \to w \in P$ und $a \to v \in P$ die Beziehung $w = v$ folgt.

Ein PD0L-System ist ein 0L-System, das sowohl fortpflanzend als auch deterministisch ist.

Hierarchie der L Systems ohne Interaktion

$X \in \{0L,\ P0L, D0L, PD0L\}$,
$\mathcal{L}(X)$ — Familie der Sprachen, die von X-Systemen erzeugt werden

Satz: Das folgende Diagramm gilt.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}(CS) & \\
 & \mathcal{L}(0L) \arrow[ur] & & \mathcal{L}(CF) \arrow[ul] \\
\mathcal{L}(P0L) \arrow[ur] & & \mathcal{L}(D0L) \arrow[ul] & \mathcal{L}(REG) \arrow[u] \\
 & \mathcal{L}(PD0L) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \mathcal{L}(FIN) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Platzbedarf von 0L-Systemen

Lemma:

Es sei $G = (V, P, \omega)$ ein 0L-System. Dann gibt es eine Konstante C_G derart, dass für jedes Wort $x \in L(G)$ eine Ableitung

$$\omega = w_0 \Longrightarrow w_1 \Longrightarrow w_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow w_r = x$$

mit $|w_i| \leq C_G \cdot |x|$ existiert.

Finale Sprachen von 0L-Systemen

Definition: Die von dem 0L-System $G = (V, P, \omega)$ erzeugte *finale* Sprache $L_A(G)$ ist die Menge aller Wörter $z \in L(G)$, für die aus $z \Longrightarrow v$ die Beziehung $z = v$ folgt.

$G_6 = (\{a, b, c, d, e\}, \{a \to dabc, a \to e, b \to bc, c \to \lambda, d \to e, e \to e\}, a)$
$L(G_6) = \{a, e\} \cup \{e^{n-1}da(bc)^n \mid n \geq 1\} \cup \{e^n(bc)^n \mid n \geq 1\}$
$L_A(G_6) = \{e\} \cup \{e^n(bc)^n \mid n \geq 1\}$

$X \in \{0L, P0L, D0L, PD0L\}$
$\mathcal{L}(AX)$ – Familie der finalen Sprachen, die von X-Systemen erzeugt werden

Theorem:
i) $\mathcal{L}(A0L) = \mathcal{L}(AP0L) = \mathcal{L}(CF)$.
ii) $\mathcal{L}(AD0L) = \mathcal{L}(APD0L) = \{\{w\} \mid w \in V^+\} \cup \{\emptyset\}$.

Entscheidungsprobleme I

Mitgliedsproblem	–	Zu gegebenem X-System $G = (V, P, \omega)$ und gegebenem Wort $w \in V^*$, ist zu entscheiden, ob $w \in L(G)$ gilt.
Leerheitsproblem	–	Zu gegebenem X-System $G = (V, P, \omega)$, ist zu entscheiden, ob $L(G)$ leer ist.
Endlichkeitsproblem	–	Zu gegebenem X-System $G = (V, P, \omega)$, ist zu entscheiden, ob $L(G)$ endlich ist.
Äquivalenzproblem	–	Zu gegebenen X-Systemen $G = (V, P, \omega)$ und $H = (V, P', \omega')$, ist zu entscheiden, ob $L(G) = L(H)$ gilt.

Entscheidungsprobleme II

Bemerkung:
Das Leerheitsproblem für 0L-Systeme ist uninteressant/trivial, da jedes 0L-System eine nichtleere Sprache erzeugt.

Theorem:
Das Mitgliedsproblem für 0L-Systeme ist in polynomialer Zeit entscheidbar.

Theorem:
Das Endlichkeitsproblem für 0L-Systeme ist in polynomialer Zeit entscheidbar.

Theorem:
i) Das Äquivalenzproblem für (P)0L-Systeme ist unentscheidbar.
ii) Das Äquivalenzproblem für (P)D0L-Systeme ist entscheidbar.

Wachstumsfunktionen I

Für ein D0L-System G enthält $L_m(G)$ genau ein Element w_m.

Definition: Die *Wachstumfunktion* $f_G : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ eines deterministischen 0L-System G ist durch

$$f_G(m) = |w_m|$$

definiert.

$G = (\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{a_1 \to v_1, a_2 \to v_2, \ldots, a_n \to v_n\}, \omega)$
Wachstumsmatrix M_G von G — $M_G = (\#_{a_i}(v_j))$ $\quad$ ((n,n)-Matrix)

Theorem: Für ein D0L-System G mit der Wachstumsmatrix M_G gilt

$$f_G(m) = \Psi_V(\omega)(M_G)^m(1, 1, \ldots, 1)^T .$$

Einiges aus der linearen Algebra

Das *charakteristische Polynom* $\chi_A(x)$ einer (quadratischen) Matrix A ist durch

$$\chi_A(x) = det(A - xE) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(E – Einheitsmatrix) definiert.
$a_n = (-1)^n$, $a_0 = det(A)$

μ heißt *Eigenwert* der quadratischen Matrix A, wenn $det(A - \mu E) = 0$ gilt.
μ ist genau dann Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn μ Nullstelle von χ_A ist.

Satz von Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = 0$

Lineare Differenzgleichungen

Das Polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ habe die Nullstellen α_i mit der Vielfachheit t_i, $1 \leq i \leq s$. $(\sum_{i=1}^{s} t_i = n)$

Die lineare Differenzgleichung

$$a_n f(m+n) + a_{n-1} f(m+n-1) + \ldots + a_2 f(m+2) + a_1 f(m+1)x + a_0 f(m) = 0$$

mit $m \geq 0$ hat die Lösung

$$f(m) = \sum_{i=1}^{s} (\beta_{i,0} + \beta_{i,1}m + \beta_{i,2}m^2 + \ldots \beta_{i,t_i}m^{t_i})\alpha_i^m$$

mit gewisse Konstanten $\beta_{i,j}$, $1 \leq i \leq s$, $0 \leq j \leq t_i$.

Wachstumsfunktionen II

Theorem:

Es sei $G = (V, P, \omega)$ ein D0L-System mit $\#(V) = n$.
Weiterhin sei M_G die Wachstummatrix von G.
Ferner seien μ_i, $1 \le i \le s$, die Eigenwerte von M_G, und die Vielfachheit von μ_i sei t_i. $(\sum_{i=1}^{s} t_i = n)$

Dann gilt

$$f_G(m) = \sum_{i=1}^{s} (\beta_{i,0} + \beta_{i,1} m + \beta_{i,2} m^2 + \ldots \beta_{i,t_i} m^{t_i}) \mu_i^m$$

mit gewissen Konstanten $\beta_{i,j}$, $1 \le i \le s$, $0 \le j \le t_i$.

Wachstumsfunktionen III

Theorem:

Für die Wachstumsfunktion f_G eines D0L-Systems G gilt eine der folgenden Bedingungen:

a) Es gibt eine Konstante c derart, dass $f_G(m) \leq c$ für alle $m \geq 0$ gilt.

b) Es gibt Konstanten $c_1,\ c_2,\ p$ und m_0 derart, dass $c_1 m^p \leq f_G(m) \leq c_2 m^p$ für alle $m \geq m_0$ gilt.

c) Es gibt Konstanten $c_1,\ c_2$ und m_0 derart, dass $c_1^m \leq f_G(m) \leq c_2^m$ for all $m \geq m_0$.

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Definitionen I

Definition: Es seien k und l zwei nicht-negative ganze Zahlen.
Ein $< k, l >$ *Lindenmayer-System* (kurz $< k, l >$L-System) ist ein Quadrupel $G = (V, \$, P, \omega)$ mit folgenden Bestandteilen:

– V ist ein Alphabet, \$ ist ein Symbol, das nicht in V ist,

– P ist eine endliche Menge von Quadrupeln (u, a, v, w), für die folgende Bedingungen gelten:

a) $u = \$^r u'$ für gewisse $r \in \mathbf{N}_0$ und $u' \in V^*$ mit $|u| = k - r$,
b) $a \in V$,
c) $v = v'\$^s$ für gewisse $s \in \mathbf{N}_0$ und $v' \in V^*$ mit $|v| = l - s$,
d) $w \in V^*$

und für jedes Tripel (u, a, v) mit den Eigenschaften a), b) and c) gibt es ein $w \in V^*$ mit $(u, a, v, w) \in P$.

– ω ist ein nichtleeres Wort über V.

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Definitionen II

Definition: Es sei G ein $< k, l >$L-System.

Ferner seien $x \in V^+$ and $y \in V^*$ zwei Wörter. Wir sagen, dass x *direkt* y *ableitet* (geschrieben als $x \Longrightarrow_G y$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

– $x = a_1 a_2 \ldots a_n$ mit $a_i \in V$ für $1 \leq i \leq n$,

– $y = y_1 y_2 \ldots y_n$,

– $(u_i, a_i, v_i) \to y_i \in P$ wobei

$$u_i = \begin{cases} \$^{k-i+1} a_1 a_2 \ldots a_{i-1} & \text{for } 1 \leq i \leq k \\ a_{i-k} a_{i_k+1} \ldots a_{i-1} & \text{for } k < i \end{cases} \quad \text{und}$$

$$v_i = \begin{cases} a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{i+l} & \text{for } i + l \leq n \\ a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_n \$^{l+i-n} & \text{for } n < i + l \end{cases} \quad \text{gelten.}$$

Die *von* G *erzeugte Sprache* $L(G)$ ist durch $L(G) = \{z \mid \omega \Longrightarrow_G^* z\}$ definiert.

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Beispiele I

$< 1,0 >$L-System $G_7 = (\{a,b,c\},\$,P_7,c)$ mit

$$\begin{aligned} P_7 &= \{(\$,a)\to a^2, (\$,b)\to b, (\$,c)\to a, (\$,c)\to ba^2, (a,a)\to a^2\} \\ &\quad \cup\{(p,q)\to q \mid (p,q)\in\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}\setminus\{(a,a)\}\} \\ L(G_7) &= \{c\}\cup\{a^{2^n} \mid n\geq 0\}\cup\{ba^{2^n+1} \mid n\geq 0\} \end{aligned}$$

$< 1,1 >$L-System $G_8 = (\{a,b\},\$,P_8,ab^2)$, wobei

P_8 aus den folgenden Regeln besteht: $\begin{cases} (u,a,b)\to a^2 & \text{für} \quad u\in\{a,b,\$\}, \\ (a,b,v)\to b^3 & \text{für} \quad v\in\{a,b,\$\}, \\ (u,z,v)\to z & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$

$$L(G_8) = \{a^n b^{2n} \mid n\geq 1\}$$

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Beispiele II

$<1,0>$L-System $G_9 = (\{a,b,o,r\},\$,P_9,ar)$,

wobei P_9 aus den folgenden Regeln besteht:

– $(\$,a) \to o,\ (o,a) \to b,\ (o,b) \to o,\ (o,r) \to ar$,

– $(u,o) \to a$ für $u \in \{a,b,o,r,\$\}$,

– $(u,z) \to z$ in allen anderen Fällen

$$ar \Longrightarrow or \Longrightarrow aar \Longrightarrow oar \Longrightarrow abr \Longrightarrow obr \Longrightarrow aor$$
$$\Longrightarrow oaar \Longrightarrow abar \Longrightarrow obar \Longrightarrow aoar \Longrightarrow oabr \Longrightarrow abbr$$
$$\Longrightarrow obbr \Longrightarrow aobr \Longrightarrow oaor \Longrightarrow aoaar \Longrightarrow oabar \Longrightarrow \ldots$$

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Hierarchien I

$k \in \mathbf{N}_0$ und $l \in \mathbf{N}_0$

$\mathcal{L}(< k, l > L)$ — Familie aller Sprachen, die von $< k, l >$L-Systemen erzeugt werden

$\mathcal{L}(IL) = \bigcup_{k \geq 0, l \geq 0} \mathcal{L}(< k, l > L)$

Folgerung:

i) $\mathcal{L}(< 0, 0 > L) = \mathcal{L}(0L)$.

ii) Für alle $k, k', l, l' \in \mathbf{N}_0$ mit $k \leq k'$ und $l \leq l'$ gilt

$$\mathcal{L}(< k, l > L) \subseteq \mathcal{L}(< k', l' > L) \subseteq \mathcal{L}(IL)\,.$$

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Hierarchien II

Theorem:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}(RE) \\
 & \mathcal{L}(CS) \arrow[u] \\
\mathcal{L}(IL) \arrow[uur] & \mathcal{L}(CF) \arrow[u] \\
\mathcal{L}(0L) \arrow[u] & \mathcal{L}(REG) \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Hierarchien III

Lemma: Für alle $k, k', l, l' \in \mathbf{N}$ mit $k + l = k' + l'$ gilt

$$\mathcal{L}(< k, l > L) = \mathcal{L}(< k', l' > L).$$

Lemma: Für alle $k, k', l, l' \in \mathbf{N}_0$ mit $k + l < k' + l'$ gilt

$$\mathcal{L}(< k, l > L) \subset \mathcal{L}(< k', l' > L).$$

Für $k \geq 2$ setzen wir: $\mathcal{L}(kL) = \mathcal{L}(< 1, k-1 > L)$.

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Hierarchien IV

Theorem:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \\
\vdots & \mathcal{L}(4L) \arrow[u] & \vdots \\
\mathcal{L}(< 3,0 > L) \arrow[u] \arrow[ur] & \mathcal{L}(3L) \arrow[u] & \mathcal{L}(< 0,3 > L) \arrow[u] \arrow[ul] \\
\mathcal{L}(< 2,0 > L) \arrow[u] \arrow[ur] & \mathcal{L}(2L) \arrow[u] & \mathcal{L}(< 0,2 > L) \arrow[u] \arrow[ul] \\
\mathcal{L}(< 1,0 > L) \arrow[u] \arrow[ur] & & \mathcal{L}(< 0,1 > L) \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \mathcal{L}(0L) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Lindenmayer-Systeme mit Interaktion – Finale Sprachen und Wachstumsfunktionen

Theorem: $\mathcal{L}(AIL) = \mathcal{L}(RE)$.

Theorem:
Es gibt ein deterministisches $< 1, 0 >$L-System G derart, dass seine Wachstumsfunktion nicht Wachstumsfunktion eines D0L-Systems ist.
Genauer, f_G ist nicht beschränkt durch eine Konstante und

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f_G(m)}{p(m)} = 0$$

gilt für jedes Polynom p.