Logik für Bachelor IF 07

Übungsblatt 7
(für die 49. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2007/2008

Magdeburg, 27. November 2007

1. Es sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Geben Sie die Definition der Begriffe
   - Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Belegung bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Terms bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung α,
   - Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung α.

2. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \tau(c) &= 2, & \tau(f) &= F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) &= \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) &= R_< = \{(n,m) \mid n < m\} \end{aligned}$$

   und die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = 1$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

   a) $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   b) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   c) $A = \forall x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   d) $A = \exists x(r_2(f(c), x) \wedge r_2(x, f(x)))$.

3. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \{a, b\}^*$ und

$$\begin{aligned} &\tau(c) = ab, \\ &\tau(f) = F\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^* \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \begin{cases} aau' & \text{für } u = au', \\ u & \text{sonst,} \end{cases} \\ &\tau(r_1) = \{u \in \{a,b\}^* \mid u \text{ beginnt mit } a\}, \\ &\tau(r_2) = \{(u,v) \bigm| |u| \leq |v|\} \end{aligned}$$

   sowie die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = bb$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

   a) $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   b) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   c) $A = \forall x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   d) $A = \exists x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$.

4. Sei $\mathcal{S}_1$ die Signatur, die durch

$$K = \emptyset, \quad R_2 = \{r\}, \quad R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 3$$

   gegeben ist. Ferner seien

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x r(x,x), \\ A_2 &= \forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x)), \\ A_3 &= \forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z)). \end{aligned}$$

   Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

   a) $\{A_1, A_2, A_3\}$,
   b) $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$,
   c) $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$,
   d) $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$.