

Vorbemerkungen

if ($x > y$) $z = x$; *else* $z = y$;

Wenn es blaue Tiger regnet, dann fressen alle Kirschbäume schwarze Tomaten.

$$q(1) = 1,$$

$$q(i) = q(i - 1) + 2i - 1 \text{ für } i \geq 2$$

Welchen Wert hat $q(6)$?

24 ist durch 2 teilbar.

24 ist durch 3 teilbar.

24 ist durch 6 teilbar.

Wenn 24 durch 2 teilbar ist
und 24 durch 3 teilbar ist,
so ist 24 durch 6 teilbar.

Literatur

J. DASSOW: Logik für Informatiker. B.G.Teubner, Wiesbaden, 2005.

M. KREUZER, ST. KÜHLING: Logik für Informatiker. Pearson Studium 2006.

U. SCHÖNING: Logik für Informatiker. Reihe Informatik, Bd. 56, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.

J. KELLY: Logik (im Klartext). Pearson Studium, München, 2003.

D. GABBAY: Elementary Logics: A Procedural Perspective. Prentice Hall Europe, 1998.

Aussagen

Eine Aussage ist ein sprachliches oder gedankliches Gebilde, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zukommt.

Prinzip der Zweiwertigkeit: Jede Aussage ist wahr oder falsch.

Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch: Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Die Sonne kreist um die Erde.

Heute ist schönes Wetter.

x ist eine Primzahl.

Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

Wörter

Alphabet — nichtleere Menge

Buchstabe — Element eines Alphabets

Wort (über V) — Folge von Buchstaben (aus V)

V^* (bzw. V^+) — Menge aller (nichtleeren) Wörter über V

Produkt (Katenation) von Wörter — Hintereinanderschreiben von Wörtern

v Teilwort von w — $w = x_1vx_2$ für gewisse $x_1, x_2 \in V^*$

v Anfangsstück von w — $w = vx$ für ein gewisses $x \in V^*$

$\#_a(w)$ — Anzahl der Vorkommen des Buchstaben a im Wort w

$|w| = \sum_{a \in V} \#_a(w)$ — Länge des Wortes $w \in V^*$

Aussagenlogischer Ausdruck - Definition

Alphabet $V = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup \underbrace{\{ p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \}}_{var}$

Definition: i) Jede Variable p_i , $i \in \mathbb{N}$, ist ein aussagenlogischer Ausdruck über V .

ii) Sind A und B aussagenlogische Ausdrücke über V , so sind auch

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

aussagenlogische Ausdrücke über V .

iii) Ein Wort über V ist nur dann ein aussagenlogischer Ausdruck über V , falls dies aufgrund endlich oftmaliger Anwendung von i) und ii) der Fall ist.

Aussagenlogischer Ausdruck - Beispiele

a) $\neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$ — ja

b) $\neg\neg(p_1 \vee p_2)$ — ja

c) $p_1 \rightarrow \neg p_2$ — nein

d) $(\forall p_1)$ — nein

Definition: Ein aussagenlogischer Ausdruck heißt Literal, falls er die Form p_i oder $\neg p_i$ für ein $i \in \mathbf{N}$ hat.

Aussagenlogischer Ausdruck - Charakterisierung

Satz: Ein Wort A ist genau dann ein aussagenlogischer Ausdruck über V , wenn es die folgenden fünf Bedingungen (gleichzeitig) erfüllt:

1. Das Wort A beginnt mit einer Variablen oder mit \neg oder mit $($.
2. Auf eine Variable oder $)$ folgt in A das Symbol $)$ oder ein Element aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, oder die Variable bzw. $)$ ist das letzte Symbol des Wortes.
3. Auf ein Element aus $\{(, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ folgt in A eine Variable oder \neg oder $($.
4. $\#_{(}(A) = \#_{)}(A) = \#_{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}}(A)$.
5. Für jede Stelle in A , an der $($ steht, d.h. $A = W(W')$, gibt es ein Wort B mit folgenden Eigenschaften:
 - $A = W(BW'')$,
 - für jedes echte Anfangsstück U von $(B$ gilt $\#_{(}(U) \neq \#_{)}(U)$,
 - $\#_{(}((B) = \#_{)}((B) = \#_{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}}((B)$.

Aussagenlogischer Ausdruck - Wertberechnung

Definition. Eine Belegung ist eine Funktion $\alpha : var \rightarrow \{0, 1\}$

Definition: Der Wert $w_\alpha(C)$ eines aussalogischen Ausdruck C unter der Belegung α ist induktiv wie folgt definiert:

- Ist $C = p_i$ für eine Variable p_i , $i \in \mathbf{N}_0$, so gilt $w_\alpha(p_i) = \alpha(p_i)$.
- Ist $C = \neg A$, so gilt $w_\alpha(\neg A) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha(A) = 1$ gilt.
- Ist $C = (A \wedge B)$, so gilt $w_\alpha((A \wedge B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha(A) = w_\alpha(B) = 1$ gilt.
- Ist $C = (A \vee B)$, so gilt $w_\alpha((A \vee B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha(A) = w_\alpha(B) = 0$ gilt.
- Ist $C = (A \rightarrow B)$, so gilt $w_\alpha((A \rightarrow B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha(A) = 1$ und $w_\alpha(B) = 0$ gelten.
- Ist $C = (A \leftrightarrow B)$, so gilt $w_\alpha((A \leftrightarrow B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha(A) = w_\alpha(B)$ gilt.

Boolesche Funktion

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter einer n -stelligen Booleschen Funktion f verstehen wir eine Funktion von $\{0, 1\}^n$ in $\{0, 1\}$.

Beispiel:

x_1	x_2	x_3	b
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Satz: Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es 2^{2^n} Boolesche Funktionen.

Ausdruck versus Funktion I

Definition: Sei A ein aussagenlogischer Ausdruck A mit $\text{var}(A) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Die von A induzierte n -stellige Boolesche Funktion $f_{A,n}$ ist durch

$$f_{A,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_\alpha(A) \text{ mit } \alpha(p_i) = x_i \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

definiert.

x_1	x_2	$f_{(p_1 \wedge p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \vee p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \rightarrow p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \leftrightarrow p_2)}(\underline{x})$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ausdruck versus Funktion II

$$A = \neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$$

$$B = (p_2 \rightarrow p_3), \quad C = \neg B, \quad D = (p_1 \rightarrow C) \quad \text{und} \quad A = \neg D$$

$x_1 = \alpha(p_1)$	$x_2 = \alpha(p_2)$	$x_3 = \alpha(p_3)$	$w_\alpha(B)$	$w_\alpha(C)$	$w_\alpha(D)$	$w_\alpha(A)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

Semantische Äquivalenz

Definition: Ein aussagenlogischer Ausdruck A heißt semantisch äquivalent zum aussagenlogischen Ausdruck B , wenn für jede Belegung α die Beziehung $w_\alpha(A) = w_\alpha(B)$ gilt.

Bezeichnung: $A \equiv B$

Satz: Die semantische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der aussagenlogischen Ausdrücke.

Lemma: Seien A und B zwei aussagenlogische Ausdrücke und $n \in \mathbf{N}$ eine natürliche Zahl, so dass $var(A) \cup var(B) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ gilt. Dann sind A und B genau dann semantisch äquivalent, wenn $f_{A,n} = f_{B,n}$ gilt.

Tautologie, Kontradiktion, Erfüllbarkeit

Definition: i) Ein aussagenlogischer Ausdruck A heißt Tautologie, falls $w_\alpha(A) = 1$ für jede Belegung α gilt.

ii) Ein aussagenlogischer Ausdruck A heißt Kontradiktion oder unerfüllbar, falls $w_\alpha(A) = 0$ für jede Belegung α gilt.

iii) Ein aussagenlogischer Ausdruck A heißt erfüllbar, falls A keine Kontradiktion ist.

Lemma: Zwei aussagenlogische Ausdrücke A und B sind genau dann semantisch äquivalent, wenn der Ausdruck $(A \leftrightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Tautologien I

Satz: Die folgenden aussagenlogische Ausdrücke sind Tautologien:

- i) $(\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1)$ (doppelte Verneinung)
- ii) $((p_1 \wedge p_1) \leftrightarrow p_1)$
- iii) $((p_1 \vee p_1) \leftrightarrow p_1)$
- iv) $((p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1))$ (Kommutativität der Konjunktion)
- v) $((p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ (Kommutativität der Disjunktion)
- vi) $((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_1))$
- vii) $((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \leftrightarrow p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))$ (Assoziativität der Konjunktion)
- viii) $((p_1 \vee p_2) \vee p_3 \leftrightarrow p_1 \vee (p_2 \vee p_3))$ (Assoziativität der Disjunktion)

Tautologien II

Satz: (Fortsetzung)

- ix) $((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_3))$ (Distributivgesetz)
- x) $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))$ (Distributivgesetz)
- xi) $((p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2))$ (de Morgan-Regel)
- xii) $((p_1 \vee p_2) \leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2))$ (de Morgan-Regel)
- xiii) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ (Kontraposition)
- xiv) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$
- xv) $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1))$
- xvi) $((p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2)$
- xvii) $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)$

Parallele Substitution I

Bezeichnung: $psub(A, p, B)$ ist das Wort, das aus A entsteht, indem man jedes Vorkommen von p in A durch B ersetzt

Lemma: Seien A und B aussagenlogische Ausdrücke, p eine Variable und α eine Belegung. Ferner sei die Belegung β durch

$$\beta(q) = \begin{cases} \alpha(q) & q \neq p \\ w_\alpha(B) & q = p \end{cases}$$

definiert. Dann gilt

$$w_\alpha(psub(A, p, B)) = w_\beta(A).$$

Parallele Substitution II

Satz: Sind A eine Tautologie und p eine Variable, so ist für jeden aussagenlogischen Ausdruck B auch $psub(A, p, B)$ eine Tautologie.

Satz: Sind A und A' zwei semantische äquivalente Ausdrücke und p eine Variable, so sind für jeden aussagenlogischen Ausdruck B auch die Ausdrücke $psub(A, p, B)$ und $psub(A', p, B)$ semantisch äquivalent.

Sequentielle Substitution und ein Lemma

Bezeichnung: Für aussagenlogische Ausdrücke A und B und einen Teilausdruck C von A ist $ssub(A, C, B)$ die Menge der Wörter, die aus A entsteht, indem wir *ein* Vorkommen von C in A durch B ersetzen.

Satz: Seien B und C zwei semantisch äquivalente Ausdrücke, A ein Ausdruck und C ein Teilausdruck von A . Dann ist A zu jedem Ausdruck aus $ssub(A, C, B)$ semantisch äquivalent.

Satz: Seien B und C zwei semantisch äquivalente Ausdrücke, A eine Tautologie und C ein Teilausdruck von A . Dann ist jeder Ausdruck aus $ssub(A, C, B)$ eine Tautologie.

Lemma: Für einen Ausdruck A , eine Tautologie B und eine Kontradiktion C gelten

$$A \wedge B \equiv A \quad \text{und} \quad A \vee C \equiv A.$$

Normalformen I

Definition: Ein aussagenlogischer Ausdruck A ist in konjunktiver Normalform, falls A die Form

$$A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m)$$

für ein $m \geq 1$ hat, wobei jeder der Ausdrücke A_i , $1 \leq i \leq m$, die Form

$$A_i = (A_{i,1} \vee A_{i,2} \vee \dots \vee A_{i,n_i})$$

mit $n_i \geq 1$ hat, in der jeder Ausdruck $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, ein Literal ist.

Normalformen II

Definition: Ein aussagenlogischer Ausdruck A ist in disjunktiver Normalform, falls A die Form

$$A = (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m)$$

für ein $m \geq 1$ hat, wobei jeder der Ausdrücke A_i , $1 \leq i \leq m$, die Form

$$A_i = (A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \dots \wedge A_{i,n_i})$$

mit $n_i \geq 1$ hat, in der jeder Ausdruck $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, ein Literal ist.

Normalformen III

Satz: Zu jedem aussagenlogischen Ausdruck gibt es einen semantisch äquivalenten Ausdruck, bei dessen Konstruktion nur Negation, Konjunktion und Disjunktion (Alternative) benutzt werden.

Satz: Zu jedem aussagenlogischen Ausdruck A gibt es aussagenlogische Ausdrücke B in konjunktiver Normalform und C in disjunktiver Normalform, für die $A \equiv B$ und $A \equiv C$ gelten.

Folgerung: Zu jeder n -stelligen Booleschen Funktion f gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck A mit $\text{var}(A) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ und $f = f_A$.

Normalformen IV

$$A = \neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$$

disjunktive Normalform

$$M = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1),$$

$$m_{(1,0,0)} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

$$m_{(1,0,1)} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$$

$$m_{(1,1,1)} = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

$$\begin{aligned} &((p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \\ &\quad \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)) \end{aligned}$$

konjunktive Normalform

$$M' = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\} \\ \quad (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

$$s_{(0,0,0)} = (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$

$$s_{(0,0,1)} = (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$$

$$s_{(0,1,0)} = (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

$$s_{(0,1,1)} = (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$

$$s_{(1,1,0)} = (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

$$\begin{aligned} &((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \\ &\quad \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \\ &\quad \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)) \end{aligned}$$

Entscheidungsprobleme

Probleme:

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck erfüllbar?

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck eine Tautologie?

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck eine Kontradiktion?

Reduktionen:

Ein Ausdruck A ist genau dann eine Kontradiktion, wenn A nicht erfüllbar ist.

Ein Ausdruck A ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

Definitionsbasierter Algorithmus

Eingabe: Aussagenlogischer Ausdruck A mit n Variablen

$m = 0; i = 0;$

while ($m == 0 \ \&\& \ i < 2^n$) { $m = w_{\alpha_i}(A); i = i + 1;$ }

if ($m == 0$) Gib „ A ist nicht erfüllbar“ aus;
 else Gib „ A ist erfüllbar“ aus;

(dabei ist α_i die Belegung für die $\alpha_i(p_1)\alpha_i(p_2) \dots \alpha_i(p_n)$ die Binärdarstellung von i ist)

Komplexität: exponentiell

Klausel und Resolvente

Definition: Eine Klausel über $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ist eine Menge

$$K = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}, \neg p_{j_1}, \neg p_{j_2}, \dots, \neg p_{j_s}\}$$

mit

$$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_n\} \text{ und } \{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_s}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Definition: K_1 , K_2 und R seien Klauseln. R heißt Resolvente von K_1 und K_2 , falls es eine Variable p derart gibt, dass

- $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$ und
- $R = (K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$

gelten.

Klauseln und Normalformen

Alternative $A = (p_{i_1} \vee p_{i_2} \vee \dots \vee p_{i_r} \vee \neg p_{j_1} \vee \neg p_{j_2} \vee \dots \vee \neg p_{i_s})$

entspricht „eineindeutig“

Klausel $K_A = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}, \neg p_{j_1}, \neg p_{j_2}, \dots, \neg p_{i_s}\}$

konjunktive Normalform $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r)$

entspricht „eineindeutig“

Menge von Klauseln $K = \{K_{A_1}, K_{A_2}, \dots, K_{A_r}\}$

Resolutionshülle

Definition: Für eine Menge K von Klauseln setzen wir

$$\begin{aligned} \text{res}(K) &= K \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } K\}, \\ \text{res}^0(K) &= K, \\ \text{res}^{n+1}(K) &= \text{res}(\text{res}^n(K)) \text{ für } n \geq 0, \\ \text{res}^*(K) &= \bigcup_{i \geq 0} \text{res}^i(K). \end{aligned}$$

Satz: Sei K eine endliche Menge von Klauseln. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 0$ derart, dass

$$\text{res}^{k+n}(K) = \text{res}^k(K) \text{ für } n \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{res}^*(K) = \text{res}^k(K)$$

gelten.

Aussagen zur Resolution

Lemma: Es sei R die Resolvente von $K' \in K$ und $K'' \in K$. Dann ist der zur Klauselmengemenge $K = \{K', K''\}$ gehörende aussagenlogische Ausdruck $A = A_K = (D_{K'} \wedge D_{K''})$ semantisch äquivalent zu dem zur Klauselmengemenge $L = \{K', K'', R\}$ gehörenden Ausdruck $B = A_L = (D_{K'} \wedge D_{K''} \wedge D_R)$.

Lemma: Für eine endliche Menge K von nichtleeren Klauseln sind die zu K , $res^t(K)$ für $t \geq 0$ und $res^*(K)$ gehörenden Ausdrücke semantisch äquivalent zueinander.

Satz: Der zu einer endlichen Klauselmengemenge K von nichtleeren Klauseln gehörende Ausdruck ist genau dann unerfüllbar, wenn $\emptyset \in res^*(K)$ gilt.

Resolutionsalgorithmus

Eingabe: Klauselmengemenge K eines aussagenlogischen Ausdrucks A
(oder konjunktive Normalform zu A , aus der dann K
gewonnen wird)

$n = 1; R[0] = K; R[1] = res(K);$

while ($\emptyset \notin R[n] \ \&\& \ R[n] \neq R[n-1]$) { $n = n + 1; R[n] = res(R[n-1]);$ }

if ($\emptyset \in R[n]$) Gib " A ist unerfüllbar" aus;
 else Gib „ A ist erfüllbar" aus;

Komplexität: exponentiell

Hornausdruck

Definition:

Ein Hornausdruck ist ein aussagenlogischer Ausdruck in konjunktiver Normalform $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m)$, bei dem jede Alternative A_i , $1 \leq i \leq m$, höchstens eine nichtnegierte Variable enthält.

Satz:

Der Algorithmus von Horn für das Erfüllbarkeitsproblem für Hornausdrücke ist korrekt.

Algorithmus von Horn

Eingabe: Hornausdruck $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m)$

$M = \emptyset; b = 1;$

for ($i = 1; i \leq m; i++$)

 if ($A_i = p$) { $M = M \cup \{p\}; b = 0;$ }

while ($b == 0$)

{ $b = 1;$

 for ($i = 1; i \leq m; i++$)

 if ($A == (p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_k)$

 && $p \notin M$ && $q_j \in M$ für $1 \leq j \leq k$)

 { $M = M \cup \{p\}; b = 0;$ } }

$a = 1;$

for ($i = 1; i < m; i++$)

 { if ($A_i == (\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_k)$

 && $q_j \in M$ für $1 \leq j \leq k$)

$a = 0;$ }

if ($a == 0$) Gib „ A ist unerfüllbar“ aus;

 else Gib „ A ist erfüllbar“ aus;

Komplexität: polynomiell (Polynom vom Grad 3)