

# Das Halteproblem

**Gegeben:** Algorithmus  $A$ , Eingabe  $x$  (Zeichenkette)

**Frage:** Hält  $A$  auf  $x$ ?

## Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Es gibt keinen Algorithmus, der das Halteproblem entscheidet, d.h. der folgendes Verhalten hat.

Eingabe: Algorithmus  $A$  (kodiert durch Zeichenkette  $c(A)$ ), Zeichenkette  $x$   
genauer: Zeichenkette  $c(A)\#x$

Ausgabe: 1, falls  $A$  auf  $x$  hält

0, falls  $A$  auf  $x$  nicht hält

# Spezielles Halteproblem

<p>Gegeben: Algorithmus <math>A</math> Frage: Hält <math>A</math> auf <math>c(A)</math>?</p>
--

Spezialfall des Halteproblems: Der Algorithmus erhält seine eigene Kodierung als Eingabe (**Diagonalisierung**)

## Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Es gibt keinen Algorithmus, der das spezielle Halteproblem entscheidet, d.h. der folgendes Verhalten hat.

Eingabe: Algorithmus  $A$ , d.h. Zeichenkette  $c(A)$

Ausgabe: 1, falls  $A$  auf  $c(A)$  hält

0, falls  $A$  auf  $c(A)$  nicht hält

# Reduktion Spezielles Halteproblem $\rightarrow$ Halteproblem

Wäre das (allgemeine) Halteproblem entscheidbar, so wäre auch das spezielle Halteproblem entscheidbar:

- Eingabe  $c(A)$  für spezielles Halteproblem wird **transformiert** auf Eingabe  $c(A)\#c(A)$  für das allgemeine Halteproblem.
- **Ausgabe für** Eingabe  $c(A)$  des speziellen Halteproblems ist **gleich** der **Ausgabe für** Eingabe  $c(A)\#c(A)$  des allgemeinen Halteproblems.

**Folgerung:** Ist das spezielle Halteproblem unentscheidbar, so ist auch das allgemeine Halteproblem unentscheidbar.

# Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

**Annahme**, es gäbe einen Algorithmus  $B$  der das spezielle Halteproblem entscheidet.

Dann gäbe es auch den Algorithmus  $B'$  mit folgendem Verhalten.

Für eine beliebige Eingabe  $c(A)$  arbeitet  $B'$  zunächst wie  $B$ .

Erhält man bei  $B$  die **Ausgabe 0**, so **stoppt  $B'$** .

Erhält man bei  $B$  die **Ausgabe 1**, so **stoppt  $B'$  nicht** (Endlosschleife).

Betrachte  $B'$  für die Eingabe  $c(B')$ :

$B'$  hält für  $c(B')$   $\iff B$  hat für  $c(B')$  die Ausgabe 0  $\iff B'$  hält nicht für  $c(B')$ .

**Widerspruch**, d.h. die **Annahme** ist falsch.

# Details und Probleme des Beweises

- Algorithmus wird durch Zeichenkette kodiert.
  - Kodierung muss algorithmisch berechenbar sein.
  - Kodierung ist nur bei formaler Definition des Algorithmus möglich.  
(z.B. Programmiersprache)
- Bei Beschränkung auf **ein** formales Modell ist die Beweisführung nur für Algorithmen **in diesem Modell** gültig.
  - Gibt es einen **universellen** Algorithmusbegriff?
  - **Abgeschwächt**: Gibt es einen Algorithmusbegriff, der alle bisher bekannten Algorithmusbegriffe umfasst?