3. Initiale Algebren

Definition 3.1 (Wiederholung)
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur. Dann ist die **Termalgebra** T_Σ zur Signatur Σ wie folgt definiert:

- Für jede Sorte $s \in S$ ist die Trägermenge $T_{\Sigma,s}$ zur Sorte s die Menge aller Grundterme der Sorte s.
- Für ein Konstantensymbol $c: \rightarrow s$ mit $c \in OP$ gilt: $c_{T\Sigma} = c$
- Sei $\omega: w \rightarrow s$ ein Operationssymbol und $t_w \in T_{\Sigma,w}$ ein Grundtermtupel. Dann definieren wir $\omega_{T\Sigma}(t_w) = \omega(t_w)$

Definition 3.2
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und bezeichne K eine Klasse von Σ-Algebren. Eine Algebra $I \in K$ heißt **initial in *K***, wenn für alle Algebren $A \in K$ genau ein Homomorphismus
$i: I \rightarrow A$
existiert, genannt initialer Homomorphismus.
Eine Σ-Algebra heißt **initiale Σ-Algebra**, falls sie initial in der Klasse aller Σ-Algebren ist.

Bemerkungen:
1. Da man für A in der Definition auch I selbst einsetzen kann, gibt es auch genau einen Homomorphismus von $I \rightarrow I$. Da die Identitität ein Homomorphismus ist, ist dies auch der einzige.
2. Offensichtlich handelt es sich bei obiger Definition um eine spezielle Variante des initialen Objekts aus der Kategorientheorie.

Beispiel:
<u>Nat0</u>
<u>sorts</u> Nat
<u>opers</u> z: → Nat
s: Nat → Nat
<u>end</u>

	Termalgebra	NAT	INT	NATMOD3
Nat	Alle Terme	N	Z	{0, 1, 2}
z	z	0	0	0
s	(t, s(t))	(n, n+1)	(z, z+1)	(n, n+1 mod 3)
	ist initial	(auch initial)	junk	confusion

Lemma (Folgerung aus der Kategorientheorie)
Zwei bzgl. K initiale Σ-Algebren sind isomorph. Umgekehrt ist die zu einer initialen Algebra isomorphe Algebra selbst initial.

Satz 3.3
Für jede Signatur Σ ist die Termalgebra T_Σ eine initiale Σ-Algebra.
Beweis:
1. Zu zeigen, dass es für jede Σ-Algebra A einen Homomorphismus $i: T_\Sigma \rightarrow A$ gibt:
(a) $i_s(c) = c_A$ für $c: \rightarrow s$
(b) $i_s(\omega(t_w)) = \omega_A(i_w(t_w))$
2. Zu zeigen, dass zwei beliebige Homomorphismen $h, f: T_\Sigma \rightarrow A$ gleich sind:

a) Verankerung (Bilder der Konstanten sind gleich)
   $h_s(c) = c_A = f_s(c)$
b) Induktionsschritt: Sei ω: w $\rightarrow$ s $\in$ OP, $t_w \in T_{\Sigma,w}$ und gelte die Induktionsvoraussetzung $f_w(t_w) = h_w(t_w)$
   $f_s(\omega(t_w)) = ((f_s(\omega_{T\Sigma}(t_w)) =$
   $= \omega_A(f_w(t_w))$ (f Homomorphismus)
   $= \omega_A(h_w(t_w))$ (Induktionsvoraussetzung)
   $= h_s(\omega_{T\Sigma}(t_w))$ (h Homomorphismus)
   $= h_s(\omega(t_w))$

q.e.d.

Folgerung:
Die Familie von Abbildungen zur Auswertung von Grundtermen eval(A): $T_\Sigma \rightarrow A$ ist ein Σ-Homomorphismus.
Beweis:
Der initiale Homomorphismus stimmt gerade mit eval überein.

q.e.d.

Wir schränken uns im folgenden auf überschaubare Axiome ein. Wir betrachten lediglich Gleichungssysteme. Das hat zum Beispiel den Vorteil, dass man keine Widersprüche spezifizieren kann (es gibt immer mindestens ein Modell.). Ferner wird der Ableitungsbegriff (formales Folgern) wesentlich einfacher.

Definition 3.4:
Sei $\Sigma = (S, OP, X)$ eine Signatur mit Variablen, sei s eine beliebige Sorte und seien $l, r \in T_{\Sigma,s}$ zwei Terme zur Sorte s. Dann heißt

$$l \equiv r$$

eine Gleichung zur Signatur Σ, kurz **Σ-Gleichung**.
Falls weder l noch r Variablen enthalten heißt $l \equiv r$ **Grundgleichung**.

Definition 3.6:
Sei $\Sigma = (S, OP, X)$ eine Signatur mit Variablen und sei $l \equiv r$ eine Σ-Gleichung zu einer Sorte s. Sei A eine Σ-Algebra. Dann heißt $l \equiv r$ **gültig in A** geschrieben

$$A \models l \equiv r,$$

falls für alle Variablenbelegungen ass: X $\rightarrow$ A gilt:

$$xeval(ass)(l) = xeval(ass)(r)$$

Anmerkung:
Die Definition der Gültigkeit hat in der folgenden Situation eine nichtintuitive Konsequenz. Seien z. B. c_1 und c_2 zwei Konstantensymbole einer Sorte s_1 und nehmen wir an, dass in einer Algebra A $c_{1,A}$ und $c_{2,A}$ verschieden sind, dann gilt die Gleichung $c_1 \equiv c_2$ trotzdem in A, wenn eine weitere Sorte s_2 mit $A_{s2} = \emptyset$ und $X_{s2} \neq \emptyset$ existiert. In diesem Fall gibt es nämlich keine Belegungen für X, so dass obige Aussage für alle Belegungen erfüllt ist. Diesem Problem der leeren Trägermengen wird in der Logik dadurch begegnet, dass sie verboten werden. Man kann beispielsweise für jede Sorte ein Konstantensymbol einführen.

Definition 3.7
Sei $\Sigma = (S, OP, X)$ eine Signatur mit Variablen und E eine Menge von Σ- Gleichungen. Dann ist $SP = (\Sigma, E)$ eine **algebraische Spezifikation**. Eine Σ-Algebra A heißt Modell von SP - kurz SP-Algebra - falls für alle Gleichungen $e \in E$ gilt: $A \models e$. Die Klasse aller

Modelle von SP geschrieben Mod(SP) heißt **lose** (oder) klassische **Semantik** (oder Varietät) von SP.

Satz 3.8 (Satz von Birkhoff)
Eine Klasse von Σ-Algebren ist genau dann eine Varietät (durch Gleichungen definiert), wenn sie abgeschlossen ist bzgl. homomorpher Bilder ($HK \subseteq K$), direkter Produkte ($PK \subseteq K$) und Unteralgebren ($SK \subseteq K$).
Ohne Beweis: Siehe auch Übung:

Beispiel
<u>NAT</u>
<u>sorts</u> Nat
<u>opers</u> z: → Nat
s: Nat → Nat
add(Nat Nat) → Nat
<u>axioms</u> n, n1,n2: Nat
add(z, n) = n (E_1)
add(s(n1), n2) = s(add(n1,n2)) (E_2)
<u>end</u>

Modelle dieser Spezifikation sind neben den natürlichen Zahlen auch die ganzen Zahlen (junk) und die ganzen Zahlen modulo 3.

Bemerkung:
Homomorphismen bewahren Grundgleichungen und eine Gleichung mit Variablen, die in der Urbildalgebra gilt, gilt auch in der Bildalgebra. Das heißt aber nicht, dass wenn h: A → B ein Homomorphismus ist und *e* eine Gleichung ist, die in *A* gilt, dass sie dann auch in der gesamten Algebra *B* gilt.
Gegenbeispiel:
$A=(\{X,Y,Z\}, z_A=Z, s_A = \{(X,Y), (Y,X), (Z,Z)\})$
$B= (\{a,b,c\}, z_B=c, s_B = \{(a,b), (b,c), (c,a)\})$
h: B → A mit h(x) = Z für alle x
ist Homomorphismus, und die Gleichung s(s(s(x))) = x gilt in B aber nicht in A.
Auf der anderen Seite existiert kein Homomorphismus
f: A → B,
da die Grundgleichung z = s(z) in A gilt aber nicht in B.

Die Modellklassen von losen Spezifikationen enthalten in der Regel zu viele Modelle. Häufig will man bis auf Isomorphie nur eine Algebra spezifizieren. Die Termalgebra enthält häufig aber zu viele Elemente (nicht im Sinne der Kardinalität). Wir brauchen ein Beschreibungsmittel, das uns erlaubt bestimmte Terme zu identifizieren. Das kann über Gleichungen erfolgen. Von der obigen Signatur ausgehend, wollen wir, dass die folgenden Terme einer Zeile als gleich angesehen werden:
z, add(z,z), add(z,add(z,z)), add(add(z,z),z), ... (0)
s(z), add(s(z),z), add(z,s(z)),... (1)
s(s(z)), add(s(z),s(z)), add(z,s(s(z))), add(s(s(z)),z),… (2)
s(s(s(z))),… (3)

Die Gleichheit dieser Grundterme kann durch Gleichungen ausgedrückt werden. Dazu müssen wir die kleinste Kongruenzrelation betrachten, in der diese Gleichungen gelten.

Definition 3.9:
Sei $\Sigma = (S, OP, X)$ eine Signatur mit Variablen und E eine Menge von Σ- Gleichungen. Wir definieren eine die Relation $\sim^E_s \subseteq T_{\Sigma,s} \times T_{\Sigma,s}$ auf den Grundtermen der Signatur für alle Sorten parallel, wie folgt induktiv:

1. Für alle $t \in T_{\Sigma,s}$ gilt: $t \sim^E_s t$
2. Für jede Gleichung $(l \equiv r) \in E$ und alle Variablenbelegungen $\sigma: X \rightarrow T_\Sigma$ gilt: $xeval(\sigma)(l) \sim^E_s xeval(\sigma)(r)$ (T_Σ ist hierbei Termalgebra)
3. Für alle $\omega: s_1,...,s_n \rightarrow s \in OP$ und für alle $1 \leq i \leq n$ t_i, t_i' mit $t_i \sim^E_s t_i'$ gilt: $\omega(t_1,\ldots,t_n) \sim^E_s \omega(t_1',\ldots,t_n')$
4. Für alle $t_1, t_2 \in T_{\Sigma,s}$ gilt: $t_1 \sim^E_s t_2 \Rightarrow t_2 \sim^E_s t_1$
5. Für alle $t_1, t_2, t_3 \in T_{\Sigma,s}$ gilt: $t_1 \sim^E_s t_2 \wedge t_2 \sim^E_s t_3 \Rightarrow t_1 \sim^E_s t_3$
6. Keine weiteren Paare stehen in der Familie der Relationen $\sim^E$.

Satz 3.10:
Für jede Signatur mit Variablen $\Sigma = (S, OP, X)$ und jede Menge E Σ- Gleichungen ist $\sim^E$ eine Kongruenzrelation auf T_Σ.
Beweis:
Aufgrund der Punkte (1), (4) und (5) ist $\sim^E$ eine Äquivalenzrelation. Verträglichkeit mit den Operationen wird unter (3) gefordert, weshalb eine Kongruenzrelation vorliegt.
q.e.d.

Wir wollen als nächstes zeigen, wie sich deduktiv (also in der Definition entgegengesetzten Richtung) die Kongruenz zweier Terme herleiten lässt. Das entsprechende Verfahren heißt Termersetzung. Es ist nicht allgemein anwendbar, jedoch in vielen Fällen:
Beispiel:
Zu zeigen: $add(z,s(s(z))) \sim^E s(add(add(z,z),add(s(z),z)))$
Wir überführen jeden Term in eine Normalform, indem wir einen Teilterm suchen, so dass durch eine geeignete Substitution dieser Teilterm mit der linken Seite einer Gleichung übereinstimmt. Der Teilterm wird dann durch den substituierten Term der rechten Seite ersetzt. Wir unterstreichen die zu ersetzenden Teilterme und geben die benutzte Gleichung an:

$\underline{add(z,s(s(z)))}$	(E_1)	$ass(n) = s(s(z))$
$s(s(z))$	(Es kann keine weitere Substitution mehr vorgenommen werden.)	

$s(add(\underline{add(z,z)},add(s(z),z)))$	(E_1)	$ass(n) = z$
$s(add(z,\underline{add(s(z),z)}))$	(E_2)	$ass(n1) = z$, $ass(n2) = z$
$s(add(z,s(\underline{add(z,z)})))$	(E_1)	$ass(n) = z$
$s(\underline{add(z,s(z))})$	(E_1)	$ass(n) = s(z)$
$s(s(z))$		

Wir sehen, dass beide Terme auf den gleichen Term reduziert werden können, daher sind sie äquivalent.
Das angewandte Verfahren führt nach endlich vielen Schritten nicht zum Ziel, wenn wir beispielsweise ein Axiom der Form $f(x,y) = f(y,x)$ haben.
Ein Termersetzungssystem, das auf einem Gleichungssystem basiert, das nach endlich vielen Schritten immer abbricht heißt **terminierend**. Wenn sich beim Ersetzen immer die gleiche Normalform ergibt, sprechen wir von einem **konfluenten** Termersetzungssystem.

Satz 3.11:

Die Quotiententermalgebra $T_{SP} =_{def} T_{\Sigma}/\sim^{E}$ einer Spezifikation SP=(Σ, E) mit einer Signatur Σ und ein Gleichungssystems E ist die initiale Algebra in der Klasse aller Modelle von E.

Beweis:

Wir geben hier lediglich die Schritte an, die zu beweisen sind.

1. Zu zeigen, dass T_{SP} eine SP-Algebra ist, d.h. die Gültigkeit einer beliebigen Gleichung (t=t') aus E in T_{SP} ist zu verifizieren.
   Dafür ist zu zeigen, dass für jede Variablenbelegung ass: X → T_{SP} gilt
   xeval(ass)(t) = xeval(ass)(t')
2. Wir können die Initialität von T_{SP} zeigen, indem wir beweisen, dass die Abbildung i: T_{SP} → A für eine beliebige SP-Algebra A vermöge i([t]) = eval(A)(t) der einzige Homomorphismus von T_{SP} nach A ist.

q.e.d.