Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Beweismethoden für Quantoren

Beweismethoden für Quantoren

Allbeseitigung

Ausgehend von $\forall x\, S(x)$ kann auf $S(c)$ geschlossen werden, sofern c einen Gegenstand des Gegenstandsbereiches bezeichnet.

Existenzeinführung

Ausgehend von $S(c)$ kann man auf $\exists x\, S(x)$ geschlossen werden, sofern c einen Gegenstand des Gegenstandsbereiches bezeichnet.

Beispiel

$$\begin{array}{|l}
\forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\
\forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\
\mathrm{Cube}(d) \\
\hline
\exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)]
\end{array}$$

Existenzielle Instantiierung (Existenzbeseitigung)

Existenzbeseitigung

Ausgehend von $\exists x\, S(x)$ können wir in einem Unterbeweis $S(c)$ annehmen, unter der Bedingung, dass c ein neuer Name ist, der noch nicht verwendet wurde.

Beispiel:

Als Scotland Yard herausfand, dass ein Serienmörder sein Unwesen trieb, nannten sie ihn "Jack the Ripper", und man verwendete diesen Namen, um über ihn Überlegungen anzustellen. Niemand glaubte, dies bedeute, dass Scotland Yard wusste, wer der Mörder war.
Beachten Sie, dass die Verwendung dieses Namens durch Scotland Yard eine schreiende Ungerechtigkeit gewesen wäre, falls der Stadtschneider schon Jack the Ripper genannt worden wäre.

Beispiel

$$\begin{array}{|l}
\forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\
\forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\
\exists x\,\mathrm{Cube}(x) \\
\hline
\exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)]
\end{array}$$

Universelle Generalisierung (Alleinführung)

Alleinführung

Wenn wir einen neuen Namen c einführen, der vorher noch nicht benutzt wurde und dann den Satz $S(c)$ beweisen, können wir auf $\forall x\, S(x)$ schließen.

Beispiel:

Theorem

Jede positive gerade Zahl ist die Summe von zwei ungeraden Zahlen.

Beweis

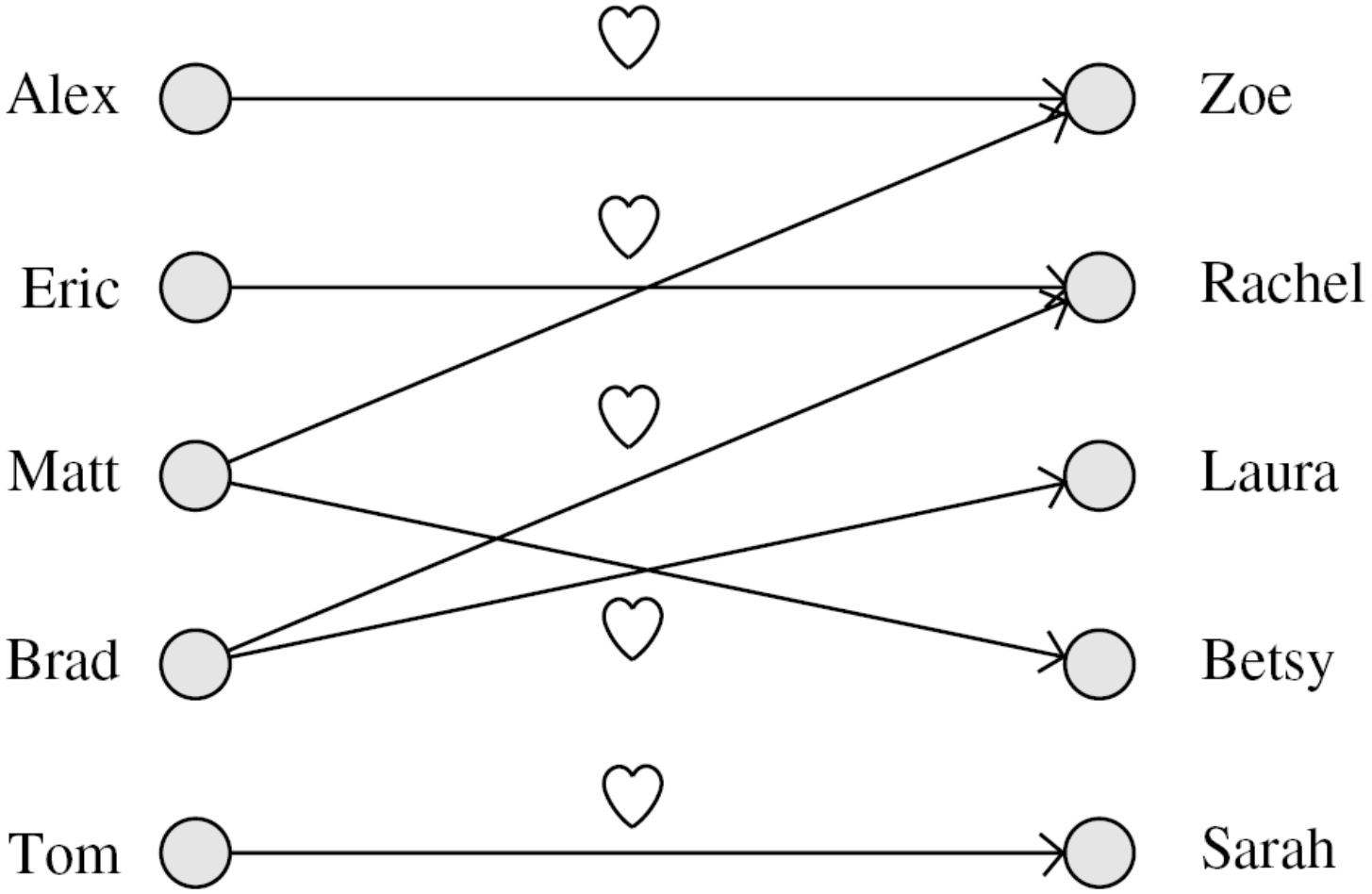
Es sei n eine gerade Zahl mit $n > 0$, d. h. $n = 2m$ mit $m > 0$.
Falls m ungerade ist, dann gilt $n = m + m$, also die Behauptung.
Falls m gerade ist, setzen wir $n = (m - 1) + (m + 1)$.

Beweise mit gemischten Quantoren

$$\begin{array}{|l} \exists y\,[\mathrm{Girl}(y) \wedge \forall x\,(\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \mathrm{Likes}(x,y))] \\ \hline \forall x\,[\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{Girl}(y) \wedge \mathrm{Likes}(x,y))] \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \forall x\,[\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{Girl}(y) \wedge \mathrm{Likes}(x,y))] \\ \hline \exists y\,[\mathrm{Girl}(y) \wedge \forall x\,(\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \mathrm{Likes}(x,y))] \end{array}$$

Ein (Gegen-)Beispiel



Allbeseitigung

Allbeseitigung ($\forall$ Elim)

$$\begin{array}{c|l} & \forall x\, S(x) \\ & \vdots \\ \triangleright & S(c) \end{array}$$

Existenzeinführung

Existenzeinführung
($\exists$ Intro)

$$\begin{array}{c|l} & S(c) \\ & \vdots \\ \triangleright & \exists x\, S(x) \end{array}$$

Beispiel: ∀-**Elim** and ∃-**Intro**

$$\begin{array}{|l}
\forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\
\forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\
\mathrm{Cube}(d) \\
\hline
\exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)]
\end{array}$$

Existenzbeseitigung

Existenzbeseitigung ($\exists$ Elim):

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x\, S(x) \\
 & \vdots \\
 & \boxed{c}\ S(c) \\
 & \vdots \\
 & Q \\
\triangleright & Q
\end{array}
$$

Dabei ist c ein Name, der nicht außerhalb dieses Unterbeweises benutzt wird.

Beispiel: $\exists$-**Elim**

$$\begin{array}{|l}
\forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\
\forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\
\exists x\,\mathrm{Cube}(x) \\
\hline
\exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)]
\end{array}$$

Allgemeiner konditionaler Beweis

Allgemeiner konditionaler Beweis ($\forall$ Intro):

$$
\begin{array}{l|l}
 & \quad \boxed{c}\ P(c) \\
 & \quad \vdash \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad Q(c) \\
\triangleright & \forall x\,(P(x) \to Q(x))
\end{array}
$$

Dabei ist c ein Name, der nicht außerhalb dieses Unterbeweises benutzt wird.

Beipiel: Allgemeiner konditionaler Beweis

$$\begin{array}{|l} \forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\ \forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\ \hline \forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b) \end{array}$$

Alleinführung

Alleinführung ($\forall$ Intro):

$$
\begin{array}{l|l}
 & \quad \boxed{c} \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad P(c) \\
\triangleright & \forall x\, P(x)
\end{array}
$$

Dabei ist c ein Name, der nicht außerhalb dieses Unterbeweises benutzt wird.

Pränexe Normalform (Wiederholung)

$$\begin{array}{|l} \exists x\, \mathsf{Cube}(x) \to \forall y\, \mathsf{Small}(y) \\ \hline \forall x\, \forall y\, (\mathsf{Cube}(x) \to \mathsf{Small}(y)) \end{array}$$

Beispiel mit mehrfachen Quantoren

$$\begin{array}{|l} \exists y\,[\mathrm{Girl}(y) \wedge \forall x\,(\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \mathrm{Likes}(x,y))] \\ \hline \forall x\,[\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{Girl}(y) \wedge \mathrm{Likes}(x,y))] \end{array}$$

Beispiel: de Morgansches Gesetz

$$\begin{array}{|l} \neg\forall x\, P(x) \\ \hline \exists x\, \neg P(x) \end{array}$$

(Gilt nicht in der intuitionistischen Logik, sondern nur in der klassischen Logik.)

Weihnachten

Die Existenz des Weihnachtsmannes

Theorem. Der Weihnachtsmann existiert.

Beweis durch Widerspruch.
Wir nehmen an, der Weihnachtsmann existiert nicht.
Durch $\exists$-Intro existiert etwas, was nicht existiert.
Das ist ein Widerspruch. Folglich ist unsere Annahme, dass der Weihnachtsmann nicht existiert, falsch.
Also existiert der Weihnachtsmann. $\square$

Alle Rentiere haben die gleiche Farbe

Theorem. Für alle $n \geq 1$ haben n Rentiere die gleiche Farbe.

Beweis durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Ein Rentier hat die gleiche Farbe (offensichtlich).
Induktionsschritt: Wir nehmen an, n beliebige Rentiere haben die gleiche Farbe (Induktionsvoraussetzung), und wir zeigen dass dann $n+1$ beliebige Rentiere die gleiche Farbe haben (Induktionsbehauptung).
Es seien also $n+1$ beliebige Rentiere gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n Rentiere die gleiche Farbe. Wir entfernen jetzt das letzte Rentier davon und ersetzen es durch das $(n+1)$-ste Rentier. Wiederum nach Induktionsvoraussetzung haben jetzt diese n Rentiere die gleiche Farbe. Also haben alle $n+1$ Rentiere die gleiche Farbe. $\square$

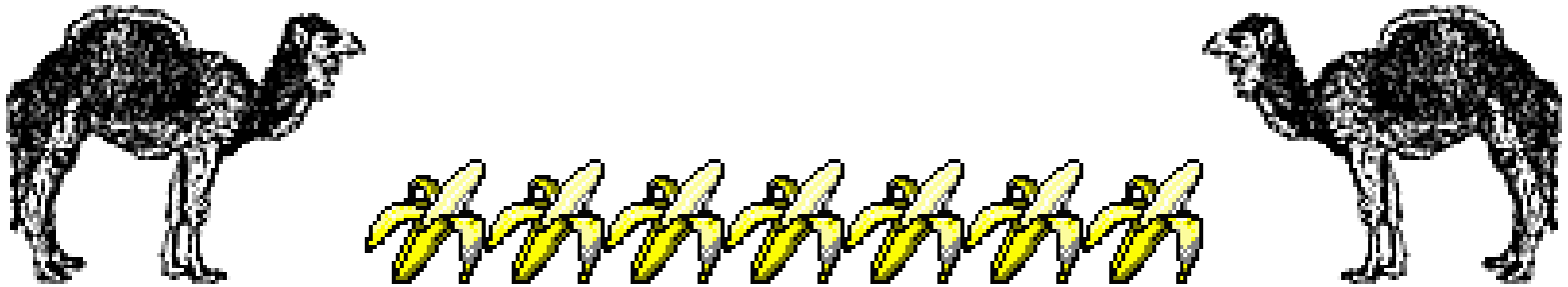
Warum das Datum von Heilig Abend nicht überrascht

Sohn: Es ist langweilig, Heilig Abend ist immer am 24. Dezember.
Vater: Ok, in diesem Jahr werden wir Heilig Abend an einem Tag in der Woche vom 23. bis zum 29. Dezember begehen, aber du wirst den genauen Tag nicht vorher kennen.
Sohn: Gut! Dann kann es aber nicht der 29. sein, denn wenn er es wäre, hätten wir Heilig Abend nicht bis zum 28. begangen, also hätte ich das Datum vorher gewusst – und das darf nicht sein. Außerdem kann es auch nicht der 28. sein, da wir dann ja bis zum 27. Heilig Abend noch nicht begangen haben, also hätte in diesem Fall ich auch hier das Datum vorher gewusst (den 29. hatten wir ja bereits ausgeschlossen).
Sohn (Fortsetzung): Analog kann es dann auch nicht der 27., nicht der 26., der 25., der 24., der 23. sein. Also kannst du die Bedingung, ich darf den Tag vorher nicht kennen, nicht erfüllen.
Vater: Du wirst sehen, du wirst das Datum vorher nicht kennen.

Warum das Datum von Heilig Abend überraschen kann

Schließlich wurde Heilig Abend am 27. Dezember begangen.

Der Sohn war ziemlich überrascht.

Ein Optimierungsproblem

Ein Kamel braucht bis zur nächsten Stadt 1000 Meilen quer durch die Wüste.
Es hat 3000 Bananen zur Verfügung, kann aber nur maximal 1000 Bananen zur gleichen Zeit tragen. Es kann aber auf der Strecke "Depots" anlegen. Für jede Meile, die das Kamel unterwegs ist, muss es eine Banane essen.
Wie viele Bananen kann es maximal zur Stadt transportieren.