Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Die Logik der Quantoren

Wahrheitsfunktionale Form

Ersetze alle quantifizierten Teilformeln, die nicht im Skopus eines anderen Quantors liegen, durch Satzbuchstaben.

Gleiche Formeln innerhalb eines Satzes werden dabei durch den gleichen Buchstaben ersetzt.

Ein quantifizierter Satz der Sprache erster Stufe heißt genau dann eine Tautologie, wenn wenn seine wahrheitsfunktionale Form eine Tautologie ist.

$$\forall x\ Cube(x) \vee \neg \forall x\ Cube(x)$$

wird zu

$$A \vee \neg A$$

Wahrheitsfunktionale Form – Beispiele

PL1-Satz	w. f. Form
$\forall x\, Cube(x) \lor \neg\forall x\, Cube(x)$	$A \lor \neg A$
$(\exists y\, Tet(y) \land \forall z\, Small(z)) \rightarrow \forall z\, Small(z)$	$(A \land B) \rightarrow B$
$\forall x\, Cube(x) \lor \exists y\, Tet(y)$	$A \lor B$
$\forall x\, Cube(x) \rightarrow Cube(a)$	$A \rightarrow B$
$\forall x\, (Cube(x) \lor \neg Cube(x))$	A
$\forall x\, (Cube(x) \rightarrow Small(x)) \lor \exists x\, Dodec(x)$	$A \lor B$

Beispiele für die $\rightarrow$-Elimination

$$\begin{array}{|l} \exists x(\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \\ \exists x\ \mathrm{Cube}(x) \\ \hline \exists x\ \mathrm{Small}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} A \\ B \\ \hline C \end{array}$$

Nein!

$$\begin{array}{|l} \exists x \mathrm{Cube}(x) \rightarrow \exists x\ \mathrm{Small}(x) \\ \exists x\ \mathrm{Cube}(x) \\ \hline \exists x\ \mathrm{Small}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Ja!

Tautologien und logische Wahrheiten

Jede Tautologie ist eine logische Wahrheit, aber nicht umgekehrt. Beispiel:

$$\exists x\ Cube(x) \vee \exists x\ \neg Cube(x)$$

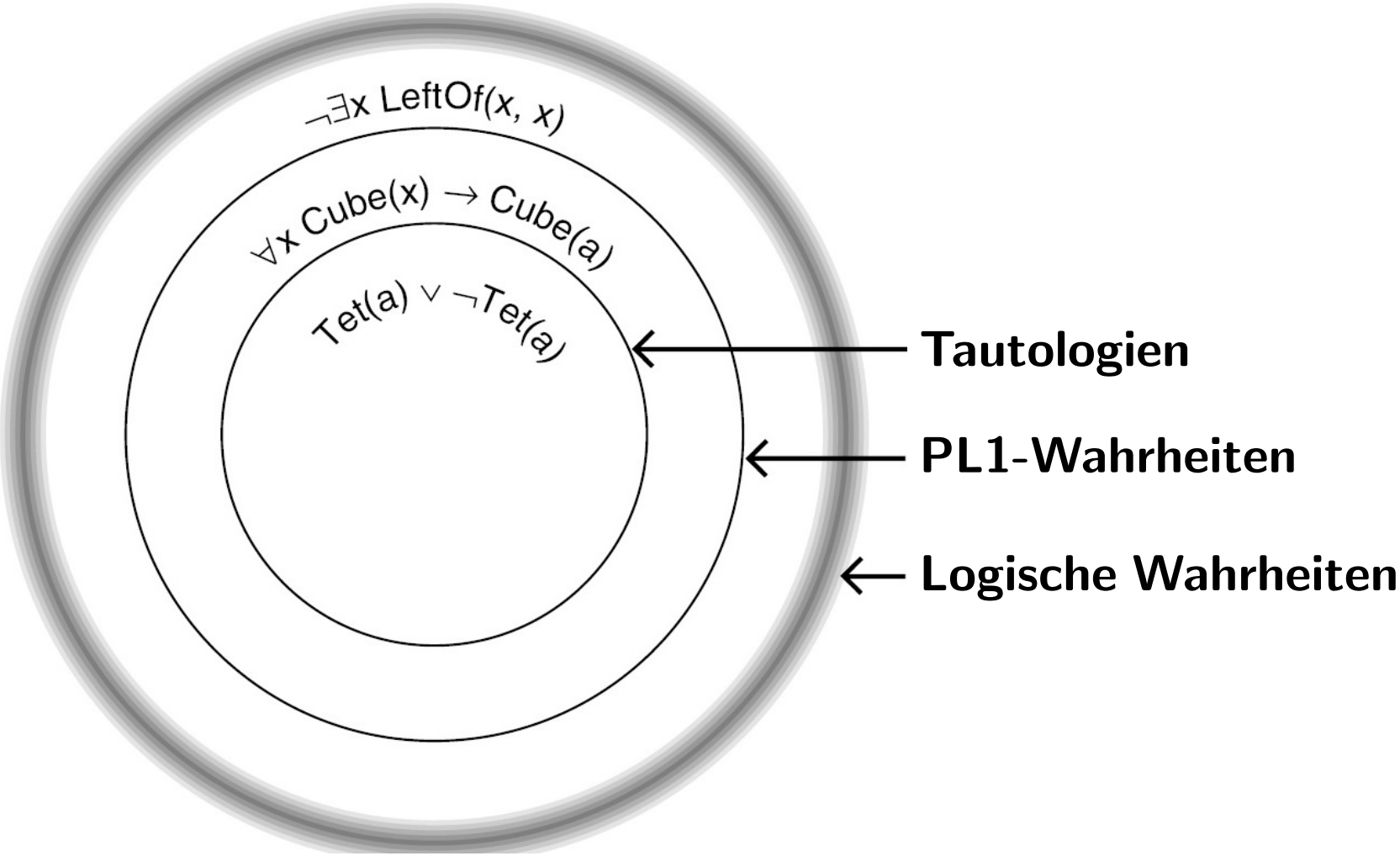
ist eine logische Wahrheit, aber keine Tautologie.

Analog ist jedes tautologisch gültige Argument auch logisch gültig, aber nicht umgekehrt.

$$\begin{array}{|l} \forall x\ \mathrm{Cube}(x) \\ \hline \exists x\ \mathrm{Cube}(x) \end{array}$$

ist ein logisch gültiges Argument, aber kein tautologisch gültiges Argument

Die verschiedenen Stufen der Wahrheiten



Tautologien und logische Wahrheiten (Fortsetzung)

Aussagenlogik	PL1	Tarski's World	Allgemein
Tautologie	*PL1-Wahrheit*	*TW-Wahrheit*	*Logische Wahrheit*
Tautologische Folgerung	*PL1-Folgerung*	*TW-Folgerung*	*Logische Folgerung*
Tautologische Äquivalenz	*PL1-Äquivalenz*	*TW-Äquivalenz*	*Logische Äquivalenz*

PL1-Wahrheiten und Ersetzungsmethode

Wenn man erkennen kann, dass ein Satz logisch wahr ist, ohne die Bedeutung der Namen, der Prädikate (außer der Identität) und der Funktionssymbole zu kennen, die in ihm vorkommen, dann bezeichnen wir diesen Satz als PL1-Wahrheit.

Um auf PL1-Wahrheit oder analog auf PL1-Folgerung zu testen, ersetzt man zunächst alle Prädikate außer der Identität durch neue, bedeutungslose Prädikate, wobei darauf zu achten ist, alle Vorkommen eines Prädikates durch dasselbe bedeutungslose Prädikat zu ersetzen. (Falls Funktionssymbole vorkommen, werden auch sie entsprechend ersetzt.)

Welche Sätze sind PL1-Wahrheiten?

$$\forall x\ SameSize(x, x)$$

$$\forall x\ Cube(x) \rightarrow Cube(b)$$

$$(Cube(b) \wedge b = c) \rightarrow Cube(c)$$

$$(Small(b) \wedge SameSize(b, c)) \rightarrow Small(c)$$

Ersetzen der Prädikate durch bedeutungslose Prädikate

$$\forall x \; Outgrabe(x, x)$$

$$\forall x \; Tove(x) \rightarrow Tove(b)$$

$$(Tove(b) \wedge b = c) \rightarrow Tove(c)$$

$$(Slithy(b) \wedge Outgrabe(b, c)) \rightarrow Slithy(c)$$

Welche Sätze sind PL1-Wahrheiten? – Fortsetzung

$\forall x\ SameSize(x, x)$	$\forall x\ P(x, x)$
$\forall x\ Cube(x) \rightarrow Cube(b)$	$\forall x\ Q(x) \rightarrow Q(b)$
$(Cube(b) \wedge b = c) \rightarrow Cube(c)$	$(Q(b) \wedge b = c) \rightarrow Q(c)$
$(Small(b) \wedge SameSize(b, c)) \rightarrow Small(c)$	$(R(b) \wedge P(b, c)) \rightarrow R(c)$

Welche Sätze sind PL1-Wahrheiten? – Fortsetzung

$\forall x\ SameSize(x, x)$	$\forall x\ P(x, x)$
$\forall x\ Cube(x) \rightarrow Cube(b)$	$\forall x\ Q(x) \rightarrow Q(b)$
$(Cube(b) \wedge b = c) \rightarrow Cube(c)$	$(Q(b) \wedge b = c) \rightarrow Q(c)$
$(Small(b) \wedge SameSize(b, c)) \rightarrow Small(c)$	$(R(b) \wedge P(b, c)) \rightarrow R(c)$

Alle Sätze sind logische Wahrheiten,
aber nur Sätze 2 und 3 sind PL1-Wahrheiten.

Ist das ein gültiges PL1-Argument?

$$\begin{array}{|l} \forall x(\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)) \\ \neg \mathrm{Large}(b) \\ \hline \neg \mathrm{Tet}(b) \end{array}$$

Ist das ein gültiges PL1-Argument?

$$\begin{array}{|l} \forall x(\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)) \\ \neg \mathrm{Large}(b) \\ \hline \neg \mathrm{Tet}(b) \end{array}$$

Ersetzen durch bedeutungslose Prädikate:

$$\begin{array}{|l} \forall x(\mathrm{Borogove}(x) \rightarrow \mathrm{Mimsy}(x)) \\ \neg \mathrm{Mimsy}(b) \\ \hline \neg \mathrm{Borogove}(b) \end{array}$$

Ist das ein gültiges PL1-Argument?

$$\begin{array}{|l} \forall x(\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)) \\ \neg \mathrm{Large}(b) \\ \hline \neg \mathrm{Tet}(b) \end{array}$$

Ersetzen durch bedeutungslose Prädikate:

$$\begin{array}{|l} \forall x(\mathrm{Borogove}(x) \rightarrow \mathrm{Mimsy}(x)) \\ \neg \mathrm{Mimsy}(b) \\ \hline \neg \mathrm{Borogove}(b) \end{array}$$

Man erkennt, die Konklusion ist sowohl logische Folgerung als auch sogar PL1-Folgerung der Prämissen.

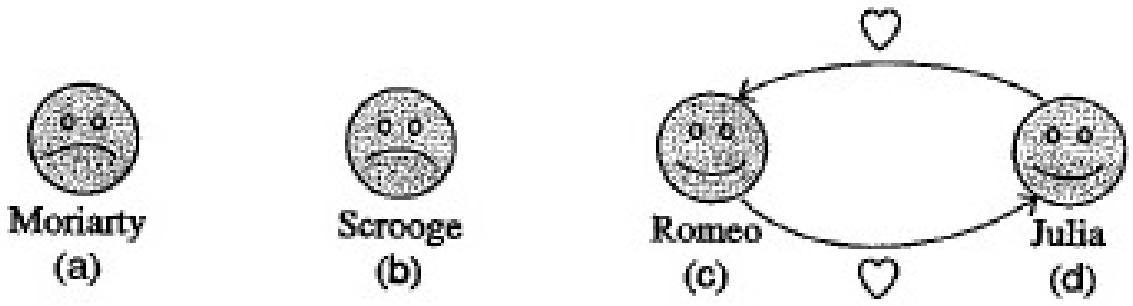
Ist das ein gültiges PL1-Argument?

$$\begin{array}{|l} \neg\exists x\ \mathrm{Larger}(x,a) \\ \neg\exists x\ \mathrm{Larger}(b,x) \\ \mathrm{Larger}(c,d) \\ \hline \mathrm{Larger}(a,b) \end{array}$$

Ersetzen durch bedeutungslose Prädikate:

$$\begin{array}{|l} \neg\exists x\ R(x,a) \\ \neg\exists x\ R(b,x) \\ R(c,d) \\ \hline R(a,b) \end{array}$$

Ein Gegenbeispiel



Ein PL1-Gegenbeispiel – Interpretiere $R(x, y)$ als $Mag(x, y)$

Ersetzungsmethode (Fortsetzung)

Um zu prüfen, ob S eine PL1-Wahrheit ist, versucht man, die Namen, Prädikate und Funktionssymbole in S zu interpretieren und eine Situation zu beschreiben, in der der interpretierte Satz S falsch ist. Wenn es keine solche Situation gibt, ist der ursprüngliche Satz eine PL1-Wahrheit.

Um zu prüfen, ob S eine PL1-Folgerung aus den Prämissen $P_1, \ldots, P_n$ ist, versucht man, eine Situation und eine Interpretation zu finden derart, dass S falsch ist, obwohl $P_1, \ldots, P_n$ alle wahr sind. Falls es keine solche Situation gibt, handelt es sich bei dem ursprünglichen Argument um eine PL1-Folgerung.

PL1-Äquivalenzen

Zwei wohlgeformte Formeln P und Q mit freien Variablen heißen logisch äquivalent, wenn sie in in allen möglichen Umständen von denselben Dingen erfüllt werden.

In Zeichen:

$$P \Leftrightarrow Q$$

Substitutionsprinzip

$$\text{Wenn } P \Leftrightarrow Q, \text{ dann } S(P) \Leftrightarrow S(Q).$$

Hierbei ist $S(_)$ ein Satz mit einer "Lücke".

DeMorgansche Gesetze für Quantoren

$$\neg\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \neg P(x)$$

$$\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, \neg P(x)$$

$$\exists x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\forall x\, \neg P(x)$$

Weitere Äquivalenzen für Quantoren (1)

$$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$$

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \quad \not\Leftrightarrow \quad \forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$$

$$\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$$

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \quad \not\Leftrightarrow \quad \exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x)$$

Weitere Äquivalenzen für Quantoren (2)

$$\left.\begin{array}{ccc} \forall x\, P & \Leftrightarrow & P \\ \exists x\, P & \Leftrightarrow & P \\ \forall x\, (P \vee Q(x)) & \Leftrightarrow & P \vee \forall x\, Q(x) \\ \exists x\, (P \wedge Q(x)) & \Leftrightarrow & P \wedge \exists x\, Q(x) \end{array}\right\} \text{falls } x \text{ in } P \text{ nicht frei ist}$$

Weitere Äquivalenzen für Quantoren (3)

$$\left.\begin{array}{lcl} \forall x\, P(x) & \Leftrightarrow & \forall y\, P(y) \\ \exists x\, P(x) & \Leftrightarrow & \exists y\, P(y) \end{array}\right\} \text{ falls } y \text{ in } P \text{ nicht vorkommt}$$

TW Folgerung $\neq$ PL1-Folgerung

Wir haben Argumente gefunden, die in Tarki's Welt gültig sind, aber nicht PL1-gültig.

$$\begin{array}{|l} \forall x\,(\mathrm{Cube}(x) \leftrightarrow \mathrm{SameShape}(x,c)) \\ \vdash \\ \mathrm{Cube}(c) \end{array}$$

Die Ersetzungsmethode liefert ein ungültiges Argument:

$$\begin{array}{|l} \forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x,c)) \\ \vdash \\ P(c) \end{array}$$

Die axiomatische Methode

Die Axiomatische Methode überbrückt die Lücke zwischen der Tarski's-Welt-Folgerung und der PL1-Folgerung, indem man in systematischer Weise Tatsachen über die Prädikate, die in unseren Argumenten vorkommen, zum Ausdruck bringt.

Die Sätze, die diese Tatsachen ausdrücken, werden als Axiome eingeführt. Sie beschränken die mögliche Interpretation der Prädikate.

Axiome können als zusätzliche Prämissen bei Folgerungen/Beweisen genutzt werden.

Das Argument noch einmal betrachtet

$$\begin{array}{|l} \forall x\,(\mathsf{Cube}(x) \leftrightarrow \mathsf{SameShape}(x,c)) \\ \forall x\,\mathsf{SameShape}(x,x) \\ \hline \mathsf{Cube}(c) \end{array}$$

Die Ersetzungsmethode liefert ein gültiges Argument:

$$\begin{array}{|l} \forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x,c)) \\ \forall x\,Q(x,x) \\ \hline P(c) \end{array}$$

Die grundlegenden Formaxiome

1. $\neg\exists x\,(Cube(x) \wedge Tet(x))$
2. $\neg\exists x\,(Tet(x) \wedge Dodec(x))$
3. $\neg\exists x\,(Dodec(x) \wedge Cube(x))$
4. $\forall x\,(Tet(x) \vee Dodec(x) \vee Cube(x))$

Ein Argument, welches die Formaxiome nutzt

$$\begin{array}{|l}
\neg\exists x\,(\mathrm{Dodec}(x) \wedge \mathrm{Cube}(x)) \\
\forall x\,(\mathrm{Tet}(x) \vee \mathrm{Dodec}(x) \vee \mathrm{Cube}(x)) \\
\neg\exists x\,\mathrm{Tet}(x) \\
\hline
\forall x\,(\mathrm{Cube}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{Dodec}(x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{|l}
\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \\
\forall x\,(R(x) \vee P(x) \vee Q(x)) \\
\neg\exists x\,R(x) \\
\hline
\forall x\,(Q(x) \leftrightarrow \neg P(x))
\end{array}$$

Einführungs- und Beseitigungsaxiome von SameShape

1. $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$
2. $\forall x \forall y ((Dodec(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$
3. $\forall x \forall y ((Tet(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$

4. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Cube(x)) \rightarrow Cube(y))$
5. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Dodec(x)) \rightarrow Dodec(y))$
6. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Tet(x)) \rightarrow Tet(y))$

Euklids Axiomatisierung der Geometrie

1. Von jedem Punkt nach jedem Punkt kann man eine Strecke ziehen.
2. Man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.
3. Man kann mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Parallelenpostulat: Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.