Logik für Informatiker Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Beweismethoden für die Boolesche Logik

Beweise

- Mittels Beweise werden wir versuchen, (tauto)logische Folgerungen zu zeigen.
- Die Wahrheitstafelmethode kann zu sehr großen Tabellen führen, Beweise sind oftmals kürzer.
- Beweise gibt es nicht nur für tautologische Folgerungen, sondern auch für Folgerungen in der vollständigen Logik erster Stufe.
- Ein Beweis besteht aus einer Folge von Beweisschritten.
- Jeder Beweisschritt muss gültig sein und muss in
 - informellen Beweisen bedeutsam aber leicht zu verstehen sein,
 - formalen Beweisen durch Beweisregeln gezeigt werden.

Formale Beweise und Boolesche Logik

Formale Beweise in Fitch

- Wir haben eine wohldefinierte Menge formaler Beweisregeln.
- Formale Beweise in Fitch können mechanisch geprüft werden.
- Für jeden Junktor gibt es
 - eine Einführungsregel, z. B. "von P schließe auf $P \vee Q$ ",
 - eine Beseitigungsregel, z. B. "von $P \wedge Q$ schließe auf P".

Konjunktions-Beseitigung

Conjunction Elimination $(\land Elim)$

$$\begin{vmatrix}
P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\
\vdots \\
P_i
\end{vmatrix}$$

Konjunktions-Einführung

Conjunction Introduction $(\land Intro)$

$$\begin{array}{c} \mathsf{P}_1 \\ \Downarrow \\ \mathsf{P}_n \\ \vdots \\ \mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n \end{array}$$

Disjunktions-Einführung

Disjunction Introduction (∨ Intro)

```
 \begin{array}{c|c} \mathsf{P}_i \\ \vdots \\ \mathsf{P}_1 \lor \ldots \lor \mathsf{P}_i \lor \ldots \lor \mathsf{P}_n \end{array}
```

Disjunktions-Beseitigung

Disjunction Elimination (V Elim)

Eine inkorrekte Nutzung von Unterbeweisen

```
      1. (B ∧ A) ∨ (A ∧ C)

      2. B ∧ A

      3. B
      ∧ Elim: 2

      4. A
      ∧ Elim: 2

      5. A ∧ C
      6. A
      ∧ Elim: 5

      7. A
      ∨ Elim: 1, 2-4, 5-6

      8. A ∧ B
      ∧ Intro: 7, 3
```

Die korrekte Nutzung von Unterbeweisen

- Um einen Beweisschritt in einem Unterbeweis zu überprüfen, kann man einen vorangegangenen Schritt im Hauptbeweis oder in jedem Unterbeweis, dessen Annahmen noch gültig sind, verwenden.
- Man darf nie einen Schritt aus einem Unterbeweis, der bereits beendet ist, verwenden.
 - Fitch unterstützt das, indem es die Verwendung von einen Schritt aus einem Unterbeweis, der bereits beendet ist, verbietet.

⊥-Einführung

⊥ Introduction
(⊥ Intro)

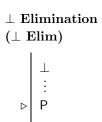
| P
| :
| ¬P
| :
| ▷ ⊥

Negations-Einführung

Negations-Beseitigung

Negation Elimination $(\neg Elim)$

⊥-Beseitigung



Strategie und Taktik in Fitch

- Machen Sie sich klar, was die Sätze besagen.
- Überlegen Sie, ob die Konklusion aus den Prämissen folgt.
- Wenn Sie meinen, dass die Konklusion nicht folgt oder sich nicht sicher sind, versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu finden.
- Wenn Sie meinen, dass die Konklusion folgt, versuchen Sie, einen informellen Beweis zu führen.
- Falls ein formaler Beweis gefordert ist, lassen Sie sich bei der Auffindung dessen vom informellen Beweis leiten.
- Vergessen Sie nicht die Taktik des Rückwärts-Arbeitens, falls Sie formal oder informell nachweisen, dass ein Satz aus anderen folgt.
- Wenn Sie rückwärts arbeiten, übreprüfen Sie stets, ob die Beweisziele Ihrer Zwischenschritte aus den gegebenen Informationen folgen.

Strategie und Taktik in Fitch (Fortsetzung)

- Versuchen Sie stets, die Situation in Ihrem beweis mit den Beweisregeln zu vergleichen (im Anhang des Buches gibt es die komplette Liste der verfügbaren Regeln, ebenso im internen Bereich auf der Webseite der Vorlesung).
- Orientieren Sie sich am Hauptjunktor einer Prämisse und wenden die entsprechende Beseitigungsregel an (vorwärts),
- oder Sie orientieren sich am Hauptjunktor der Konklusion und wenden die entsprechende Einführungsregel an (rückwärts).