Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Die Logik der Booleschen Junktoren

Aussagenlogische Formeln

Definition

Gegeben eine Menge $\mathcal{A}$ von atomaren Formeln, definieren wir die Menge der aussagenlogischen Formeln über $\mathcal{A}$ induktiv wie folgt:

1. jede Formel aus $\mathcal{A}$ ist eine aussagenlogische Formel;
2. wenn P eine aussagenlogische Formel ist, dann auch $\neg$P;
3. wenn P und Q aussagenlogische Formeln sind, dann auch $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$;
4. wenn P und Q aussagenlogische Formeln sind, dann auch $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$.

Bemerkungen:

- Die äußersten Klammern können weggelassen werden.
- Zusätzliche Klammern dürfen eingeführt werden.
- Bei mehrfachen Disjunktionen oder Konjunktionen können die Klammern weggelassen werden: $P \wedge Q \wedge R$.

Strukturelle Induktion über Formeln

Prinzip der strukturellen Induktion über aussagenlogische Formeln:

Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der atomaren Formeln und E eine Eigenschaft aussagenlogischer Formeln. Wenn gilt

1. jede Formel aus $\mathcal{A}$ hat die Eigenschaft E;
2. wenn P die Eigenschaft E hat, dann auch $\neg$P;
3. wenn P und Q die Eigenschaft E haben, dann auch (P $\vee$ Q);
4. wenn P und Q die Eigenschaft E haben, dann auch (P $\wedge$ Q);

dann hat jede aussagenlogische Formel (über $\mathcal{A}$) die Eigenschaft E.

de Morgansche Gesetze und die doppelte Negation

$$\neg(P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\neg\neg P \quad \Leftrightarrow \quad P$$

Negations-Normalform (NNF)

Definition

Ein Satz ist in Negations-Normalform (NNF), falls sich alle Vorkommen von $\neg$ direkt auf atomare Sätze beziehen.

Lemma

Wenn P in NNF ist, dann lässt sich auch $\neg P$ in eine äquivalente Formel in NNF umwandeln.

Beweis.

Strukturelle Induktion über den Aufbau der Formeln; dabei Anwendung der de Morganschen Gesetze und des Gesetzes der doppelten Negation. □

Negations-Normalform (NNF), Teil 2

Theorem

Für jede aussagenlogische Formel gibt es eine äquivalente Formel in NNF.

Beweis.

Strukturelle Induktion über den Aufbau der Formeln, unter Anwendung von obigem Lemma. □

Distributivgesetze

Für beliebige Sätze P, Q, und R gelten

- Distributivität von $\wedge$ über $\vee$:

$$P \wedge (Q \vee R) \;\Leftrightarrow\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

- Distributivität von $\vee$ über $\wedge$:

$$P \vee (Q \wedge R) \;\Leftrightarrow\; (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Konjunktive Normalform

- Ein Literal ist ein atomarer Satz oder die Negation eines atomaren Satzes.
- Ein Satz ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn er eine Konjunktion aus einer oder mehreren Disjunktionen von einem oder mehreren Literalen ist.
- Durch Anwendung der Distributivität von $\vee$ über $\wedge$ lässt sich ein beliebiger Satz in Negations-Normalform in eine konjunktive Normalform überführen.

Disjunktive Normalform

- Ein Satz ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn er eine Disjunktion aus einer oder mehreren Konjunktionen von einem oder mehreren Literalen ist.
- Durch Anwendung der Distributivität von $\wedge$ über $\vee$ lässt sich ein beliebiger Satz in Negations-Normalform in eine disjunktive Normalform überführen.

Beweismethoden für die Boolesche Logik

Logische Folgerungen

1. Ein Satz Q ist eine logische Folgerung von $P_1, \ldots, P_n$, wenn in allen Welten, in denen $P_1, \ldots, P_n$ wahr sind, auch Q wahr ist.
2. Ein Satz Q ist eine tautologische Folgerung von $P_1, \ldots, P_n$, wenn für alle Belegungen der atomaren Formeln, die $P_1, \ldots, P_n$ wahr machen, auch Q wahr ist.
3. Ein Satz Q ist eine TW-logische Folgerung von $P_1, \ldots, P_n$, wenn in allen Welten von Tarski's World, in denen $P_1, \ldots, P_n$ wahr sind, auch Q wahr ist.

Der Unterschied liegt in der Menge der betrachteten Welten:

1. alle Welten (was auch immer das exakt bedeutet ...),
2. alle Belegungen der atomaren Formeln mit Wahrheitswerten (= Zeilen der Wahrheitstafel),
3. alle Klötzchenwelten von Tarski's World.

Beweise

- Mittels Beweise werden wir versuchen, (tauto)logische Folgerungen zu zeigen.
- Die Wahrheitstafelmethode kann zu sehr großen Tabellen führen, Beweise sind oftmals kürzer.
- Beweise gibt es nicht nur für tautologische Folgerungen, sondern auch für Folgerungen in der vollständigen Logik erster Stufe.

Grenzen der Wahrheitstafelmethode

1. die Wahrheitstafelmethode führt zu exponentiell wachsenden Tabellen.
   - 20 atomare Formeln $\Rightarrow$ mehr als 1 000 000 Zeilen.
2. die Wahrheitstafelmethode kann nicht für die Logik erster Stufe erweitert werden.

- Model Checking kann die erste Beschränkung überwinden (bis zu 1 000 000 atomaren Formeln).
- Beweise können beide Beschränkungen überwinden.

Beweise

- Ein Beweis besteht aus einer Folge von Beweisschritten.
- Jeder Beweisschritt muss gültig sein und muss in
  - informellen Beweisen bedeutsam aber leicht zu verstehen sein,
  - formalen Beweisen durch Beweisregeln gezeigt werden.
- Folgende gültige Schlussprinzipien dürfen in informellen (aber nicht formalen) Beweisen zumeist stillschweigend genutzt werden:
  - Schließe von $P \wedge Q$ auf P.
  - Schließe von P und Q auf $P \wedge Q$.
  - Schließe von P auf $P \vee Q$.

Beweis durch Fallunterscheidung (Disjunction Elimination)

Um auf S von $P_1 \vee \ldots \vee P_n$ zu schließen, beweisen wir S, ausgehend von jedem einzelnen Disjunkt $P_1, \ldots, P_n$.

Behauptung:
Es gibt irrationale Zahlen b und c so, dass b^c rational ist.

Beweis: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist entweder rational oder irrational.
Fall 1: Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist, setze $b = c = \sqrt{2}$.
Fall 2: Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist, setze $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $c = \sqrt{2}$.
Dann ist $b^c = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Beweis durch Widerspruch, indirekter Beweis

Um $\neg S$ zu zeigen, nehmen wir S an und zeigen einen Widerspruch $\perp$.
($\perp$ kann aus P und $\neg P$ abgeleitet werden.)

Wir nehmen $Cube(c) \vee Dodec(c)$ und $Tet(b)$ an.

Behauptung: $\neg(b = c)$.

Beweis: Angenommen, es sei $b = c$.
Fall 1: Wenn $Cube(c)$ gilt, dann gilt wegen $b = c$ auch $Cube(b)$, was einen Widerspruch zu $Tet(b)$ darstellt.
Fall 2: $Dodec(c)$ widerspricht analog $Tet(b)$.
In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch, also kann unsere Annahme $b = c$ nicht richtig sein, folglich gilt $\neg(b = c)$.

Argumente mit sich widersprechenden Prämissen

Ein Beweis eines Widerspruchs $\bot$ von Prämissen $P_1, \ldots, P_n$ (ohne zusätzliche Annahmen) bedeutet, dass die Prämissen inkonsistent sind, sich widersprechen. Ein Argument mit sich widersprechenden Prämissen ist immer gültig, aber (fast noch wichtiger) niemals korrekt.

$$\begin{array}{|l}
\text{Home(max)} \lor \text{Home(claire)} \\
\neg\text{Home(max)} \\
\neg\text{Home(claire)} \\
\hline
\text{Home(max)} \land \text{Happy(carl)}
\end{array}$$

Argumente ohne Prämissen

Ein Beweis ohne jegliche Prämisse besagt, dass seine Konklusion eine logische Wahrheit ist.

Beispiel: $\neg(P \wedge \neg P)$.

Formale Beweise und Boolesche Logik

Formale Beweise in Fitch

- Wir haben eine wohldefinierte Menge formaler Beweisregeln.
- Formale Beweise in Fitch können mechanisch geprüft werden.
- Für jeden Junktor gibt es
  - eine Einführungsregel, z. B. "von P schließe auf $P \vee Q$",
  - eine Beseitigungsregel, z. B. "von $P \wedge Q$ schließe auf P".

Konjunktions-Beseitigung

Conjunction Elimination
($\wedge$ Elim)

$$\begin{array}{c|l} & \mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_i \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n \\ & \vdots \\ \triangleright & \mathsf{P}_i \end{array}$$

Konjunktions-Einführung

Conjunction Introduction
($\wedge$ Intro)

$$
\begin{array}{c|l}
 & \mathsf{P}_1 \\
 & \Downarrow \\
 & \mathsf{P}_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n
\end{array}
$$