Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Die Sprache PL1

Die Sprache PL1: Individuenkonstanten

- Individuenkonstanten sind Symbole, die Personen, Dinge oder Objekte bezeichnen.
- Beispiele:
  - Zahlen: 0, 1, 2, 3, ...
  - Namen: Max, Claire
  - Formale Konstanten: a, b, c, d, e, f, n1, n2
- Jede Individuenkonstante muss ein existierendes Objekt bezeichnen.
- Keine Individuenkonstante kann mehr als ein Objekt bezeichen.
- Ein Objekt kann keinen, einen oder mehrere Namen (Individuenkonstanten) haben.

Die Sprache PL1: Prädikatsymbole

- Prädikatsymbole bezeichnen eine Eigenschaft eines Objektes oder Beziehungen zwischen Objekten
- Jedes Prädikatsymbol hat eine Stelligkeit, die die Anzahl der Objekte angibt, die in Beziehung stehen.
- Beispiele:
  - Stelligkeit 0: Gate0_is_low, A, B, ...
  - Stelligkeit 1:
    Cube (Würfel), Tet (Tetraeder), Dodec (Dodekaeder),
    Small (Klein), Medium (Mittelgroß), Large (Groß)
  - Stelligkeit 2:
    Smaller (Kleiner), Larger (Größer),
    LeftOf (Links Von), BackOf (Hinter),
    Adjoins (Benachbart), SameSize (Gleichgroß), ...
  - Stelligkeit 3: Between (Zwischen)

Die Interpretation von Prädikatsymbolen

- In Tarski's World besitzt jedes Prädikatsymbol eine feste Bedeutung, die nicht immer mit der Interpretation in einer natürliche Sprache übereinstimmen muss.
- In anderen PL1-Sprachen kann die Interpretation von Prädikatsymbolen variieren. Zum Beispiel kann $\leq$ eine Ordnung von Zahlen, von Zeichenketten, Bäumen, etc. bedeuten.
- Wir vereinbaren, dass das Symbol "$=$" allerdings immer die Gleichheit, Identität bedeutet.

Atomare Sätze

- In der Aussagenlogik (Boole):
  - Die aussagenlogischen Symbole: A, B, C, ...
- In PL1 (Tarski's World):
  - Anwendung von Prädikatsymbolen auf Konstanten: Larger(a,b)
  - Reihenfolge der Argumente ist wichtig: Larger(a,b) vs. Larger(b,a)
  - Atomare Sätze haben genau einen Wahrheitswert: true (wahr, 1) oder false (falsch, 0)

Logische Argumente

Ein (logisches) Argument sagt aus, dass ein Satz, die Konklusion, von anderen Sätzen, den Prämissen, folgt.

Beispiele:

Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Lucretius ist ein Mensch. Schließlich ist Lucretius sterblich, und alle Menschen sind sterblich.

Ein Argument ist logisch gültig (oder eine logische Folgerung), wenn unter allen Umständen, unter denen die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist.

Logische Folgerungen

Ein Satz B ist eine logische Folgerung von $A_1, \ldots, A_n$, wenn unter allen Umständen, die $A_1, \ldots, A_n$ wahr machen, auch B wahr ist. In Zeichen: $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Die Sätze $A_1, \ldots, A_n$ heißen Prämissen, B heißt Konklusion.

In diesem Fall ist es ein gültiges Argument, B von $A_1, \ldots, A_n$ abzuleiten.

Ein gültiges Argument mit wahren Prämissen heißt korrekt (oder auch beweiskräftig, schlüssig).

Logische Folgerungen – Beispiele

- Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich. (gültig, korrekt)
- Alle reichen Schauspieler sind gute Schauspieler. Brad Pitt ist ein reicher Schauspieler. Also ist er ein guter Schauspieler. (gültig, aber nicht korrekt)
- Alle reichen Schauspieler sind gute Schauspieler. Brad Pitt ist ein guter Schauspieler. Also ist er ein reicher Schauspieler. (nicht gültig)

Fitch Notation für logische Folgerungen

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Also ist Sokrates sterblich.

A_1
$\vdots$
A_n

B

Prämisse$_1$
$\vdots$
Prämisse$_n$

Konklusion

Beweismethoden für die (Un-)Gültigkeit von Argumenten

Beweismethoden für die (Un-)Gültigkeit von Argumenten

Gültigkeit Um zu zeigen, dass ein Argument gültig ist, müssen wir es beweisen.
Ein Beweis besteht aus einer Folge von Beweisschritten, die alle gültig sein müssen.

- In der Aussagenlogik können wir die Gültigkeit auch durch Wahrheitstabellen zeigen. Das ist aber in der Prädikatenlogik erster Stufe nicht möglich.

Ungültigkeit Ein Argument kann als ungültig nachgewiesen werden, indem man ein Gegenbeispiel findet, d. h. eine Welt, in der alle Prämissen wahr sind, aber die Konklusion falsch ist.

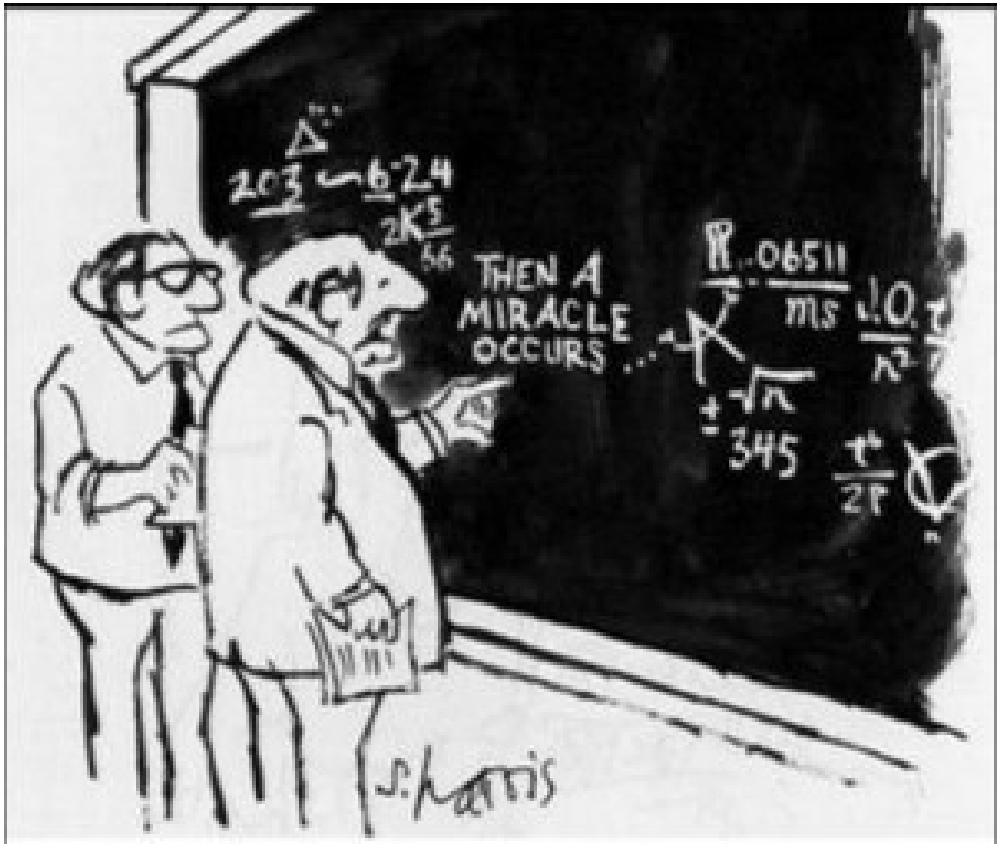
Informelle und formale Beweise

- Informelles Beweisen wird im täglichen Leben genutzt.
- Semi-formales Beweisen wird in der Mathematik und in der Theoretischen Informatik genutzt.
  - Balance zwischen Lesbarkeit und Genauigkeit.
- Formale Beweise
  - folgen einem festen System von Regeln,
  - sind vollkommen präzis
  - und können von einem Computer überprüft werden.

Ein informeller Beweis

- Da Sokrates ein Mensch ist und alle Menschen sterblich sind, folgt, dass Sokrates sterblich ist.
- Alle Sterblichen werden aber irgendwann einmal sterben (was gerade die Sterblichkeit ausmacht).
- So wird auch Sokrates irgendwann einmal sterben.
- Wir setzen aber voraus, dass jeder, der einmal sterben wird, sich gelegentlich mit dem Sterben auseinander setzt.
- Also setzt sich auch Sokrates gelegentlich mit dem Sterben auseinander.

Notwendigkeit formaler Beweise



"I think you should be more explicit here in step two."

Ein formaler Beweis

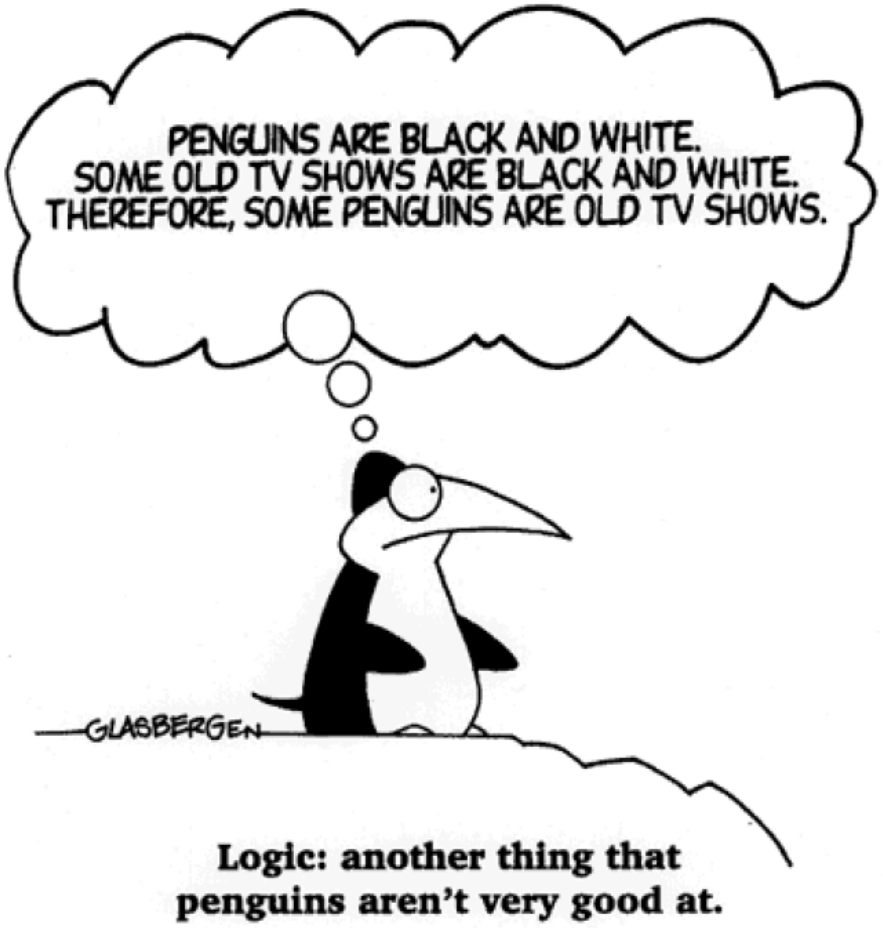
1. Cube(c)	
2. $c = b$	
3. Cube(b)	$=$ **Elim:** 1,2

Vier wichtige Prinzipien für die Identitätsrelation

1. $=$ **Elim**: Gilt $b = c$, dann trifft alles, was auf b zutrifft, auch auf c zu (Ununterscheidbarkeit von Identischem).
2. $=$ **Intro**: Sätze der Form $b = b$ sind stets wahr (in einer PL1-Sprache). (Reflexität der Identität).
3. Symmetrie der Identität: Wenn $b = c$, dann $c = b$.
4. Transitivität der Identität: Wenn $a = b$ und $b = c$, dann $a = c$.

Die beiden letzten Prinzipien folgen dabei aus den ersten beiden.

Transitivität ...



Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Informeller Beweis der Symmetrie der Identität

- Es sei $a = b$.
- Es gilt $a = a$, gemäß der Reflexivität der Identität.
- Nun ersetzen wir das erste Vorkommen des Namens a in $a = a$ durch den Namen b, wobei wir das Prinzip der Ununterscheidbarkeit von Identischem verwenden.
- Damit ergibt sich wie gewünscht $b = a$.

Formale Beweise in Fitch

Formale Beweise

P	
Q	
R	
S_1	Begründung 1
⋮	
S_n	Begründung n
S	Begründung n+1

Formaler Beweis der Symmetrie der Identität

1. $a = b$	
2. $a = a$	$=$ **Intro:**
3. $b = a$	$=$ **Elim:** 2,1

Fitch-Regel: Identity Introduction (Identitäts-Einführung)

Identity Introduction (= Intro):

$$\triangleright \left| \; n = n \right.$$

Fitch-Regel: Identity Elimination (Identitäts-Beseitigung)

Identity Elimination (= Elim):

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & P(n) \\
 & & \vdots \\
 & & n = m \\
 & & \vdots \\
\triangleright & & P(m)
\end{array}
$$

Fitch-Regel: Reiteration (Wiederholung)

Reiteration
(Reit)

	P
	⋮
▷	P

Beispiel eines Beweises in Fitch

$$\begin{array}{|l} \mathsf{SameRow}(a, b) \\ b = a \\ \hline \mathsf{SameRow}(b, a) \end{array}$$

Eigenschaften von Prädikaten in Tarski's World

$$\begin{array}{|l} \text{Larger}(a, b) \\ \text{Larger}(b, c) \\ \hline \text{Larger}(a, c) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{RightOf}(b, c) \\ \hline \text{LeftOf}(c, b) \end{array}$$

Solche Argumente können in Fitch bewiesen werden durch Verwendung der besonderen Regel **Ana Con**.

Diese Regel gilt allerdings nur für Beweise in Tarski's World!

Beweis von Ungültigkeit durch Gegenbeispiele

Al Gore ist ein Politiker.
Kaum ein Politiker ist aufrichtig.

Al Gore ist unaufrichtig.

Stellen wir uns eine Situation vor, in der es 10 000 Politiker gibt, und Al Gore der einzige aufrichtige unter ihnen ist.
Unter diesen Umständen wären beide Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch.

Eine solche Situation ist somit ein Gegenbeispiel zum Argument; es zeigt, dass das Argument ungültig ist.

Sind die folgende Argumente gültig?

$$\begin{array}{|l} \text{Small}(a) \\ \text{Larger}(b, a) \\ \hline \text{Large}(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{Small}(a) \\ \text{Larger}(a, b) \\ \hline \text{Large}(b) \end{array}$$

Die Booleschen Junktoren

Die Negation – Wahrheitstafel

P	¬P
TRUE	FALSE
FALSE	TRUE

Das Henkin-Hintikka Spiel

"Checkmate!"

Das Henkin-Hintikka Spiel

Ist ein Satz in einer gegebenen Welt wahr?

- Spieler: Sie und der Computer (Tarski's World)
- Sie behaupten, ein Satz ist wahr (oder falsch), Tarski's world wird das Gegenteil behaupten.
- In jeder Runde wird der Satz reduziert und es entsteht ein einfacherer.
- Wenn ein atomarer Satz erreicht ist, kann sein Wahrheitswert direkt in der gegebenen Welt überprüft werden.

Sie haben eine Gewinnstrategie genau dann, wenn Ihre Behauptung wahr ist.

Die Negation – Spielregeln

Form	Ihre Entscheidung	Spieler am Zug	Ziel
$\neg P$	in beiden Fällen	—	Ersetze $\neg P$ durch P und kehre die Entscheidung um.

Die Konjunktion – Wahrheitstafel

P	Q	$P \wedge Q$
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE

Die Konjunktion – Spielregeln

Form	Ihre Entscheidung	Spieler am Zug	Ziel
$P \wedge Q$	TRUE FALSE	Tarski's World Sie	Wähle eines von P, Q, das falsch ist.