Magdeburg, den 29.10.2013

Theoretische Informatik I
Übungsblatt 2
zur Vorlesung von Prof. J. Dassow
im wintersemester 2013/14 am HPI

1. Beweisen Sie, dass es für jede **LOOP/WHILE**-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl t derart existiert, dass es für jede natürliche Zahl $t' \geq t$ ein Programm $\Pi_{f,t'}$ so gibt, dass

$$\Phi_{\Pi_{f,t'},1} = f \text{ und } t(\Pi_{f,t'}) = t'$$

gelten.

2. Zeigen Sie, dass die Funktionen div : $\mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ und mod : $\mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ vermöge

$$(x,y) \mapsto \operatorname{div}(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \qquad \text{sowie} \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{mod}(x,y) = x - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y$$

LOOP/WHILE-berechenbar sind.

Sind die angegebenen Funktionen div und mod (mit eventuellen Änderungen) auch **LOOP**-berechenbar?

3. Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die nur an endlich vielen Stellen definiert ist, **LOOP/WHILE**-berechenbar ist.

4. Geben Sie die primitiv-rekursiven Funktionen f und g an, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} f(0) &= S(Z) \\ f(y+1) &= P(P_2^2(y, f(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= Z \\ g(y+1) &= f(P_2^2(y, g(y))) \end{aligned}$$

5. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv-rekursiv sind.

   a) $pot(x,y) = x^y$,

   b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$