Dreiwertige Logik I

Definition des Ausdrucks der dreiwertigen Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: $\alpha \to \{0, 1, \times\}$

Wertberechnung:

– $w^d_\alpha(p) = \alpha(p)$ für jede Variable p

– $w^d_\alpha(\neg A)$, $w^d_\alpha((A \wedge B))$, $w^d_\alpha((A \vee B))$ und $w^d_\alpha((A \vee B))$ entsprechend folgender Tabellen

A	$\neg A$
0	1
$\times$	$\times$
1	0

$\wedge$	0	$\times$	1
0	0	0	0
$\times$	0	$\times$	$\times$
1	0	$\times$	1

$\vee$	0	$\times$	1
0	0	$\times$	1
$\times$	$\times$	$\times$	1
1	1	1	1

$\to$	0	$\times$	1
0	1	1	1
$\times$	$\times$	1	1
1	0	$\times$	1

– $w^d_\alpha((A \leftrightarrow B)) = w^d_\alpha(((A \to B) \wedge (B \to A)))$.

Dreiwertige Logik II

$\times = \frac{1}{2}$

$w_\alpha^d(\neg A) = 1 - w_\alpha^d(A)$

$w_\alpha^d((A \wedge B)) = \min\{w_\alpha^d(A), w_\alpha^d(B)\}$

$w_\alpha^d((A \vee B)) = \max\{w_\alpha^d(A), w_\alpha^d(B)\}$

Satz:
Für einen aussagenlogischen Ausdruck A der dreiwertigen Logik ist es entscheidbar, ob A eine Tautologie oder erfüllbar oder eine Kontradiktion ist.

Fuzzy-Logik

Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_M : G \to [0,1]$

Definition des Ausdrucks der Fuzzy-Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: α ist Zugehörigkeitsfunktion

Wertberechnung:

– $w_\alpha^f(p) = \alpha(p)$ für eine Variable p,

– $w_\alpha^f(\neg A) = 1 - w_\alpha^f(A)$,

– $w_\alpha^f((A \wedge B)) = \min\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,

– $w_\alpha^f((A \vee B)) = \max\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,

– $w_\alpha^f((A \to B)) = \min\{1, 1 + w_\alpha^f(B) - w_\alpha^f(A)\}$,

– $w_\alpha^f((A \leftrightarrow B)) = 1 - |w_\alpha^f(A) - w_\alpha^f(B)|$.

Ausdrücke der dynamischen Logik

Definition:
Die Menge $dausd$ der Ausdrücke dynamischen Aussagenlogik und die Menge P der Programme der dynamischen Aussagenlogik über der Menge var von Variablen, der Menge anw von Grundanweisungen und den Synbolen $(,), <, >, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \cup, ;, ^*, ?$ sind induktiv wie folgt definiert.

1. Jede Variable aus var ist ein Element von $dausd$.
   Jede Anweisung aus anw ist ein Programm aus P.
2. Für $A \in dausd$, $B \in dausd$, $p \in P$ und $q \in P$ sind auch
   $\{p; q\}$, $(p \cup q)$, p^* und $A?$ Programme in P und
   $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ und $< p > A$ in $dausd$.
3. Ein Wort gehört nur dann zu $dausd$ oder P, wenn dies aufgrund der Bedingungen 1 und 2 der Fall ist.

Kripke-Modell

Definition:

Ein Kripke-Modell der dynamischen Logik ist ein Tripel $M = (S, K, R)$, wobei

- S eine beliebige Menge (von Zuständen) ist,
- $K : var \rightarrow 2^S$ ist eine Funktion, die jeder Variablen eine Menge von Zuständen zuordnet,
- $R : anw \rightarrow 2^{S \times S}$ ist eine Funktion, die jeder Anweisung eine binäre Relation über S zuordnet.

Semantik in der dynamischen Logik I

Definition:
Seien die Funktion K für $A \in dausd$ und $B \in dausd$ und die Funktion R für $p \in P$ und $q \in P$ definiert. Dann setzen wir

$$\begin{aligned}
K(\neg A) &= S \setminus K(A), \\
K((A \vee B)) &= K(A) \cup K(B), \\
K((A \wedge B)) &= K(A) \cap K(B), \\
K((A \rightarrow B)) &= (S \setminus K(A)) \cup K(B), \\
K((A \leftrightarrow B)) &= ((S \setminus K(A)) \cup K(B)) \cap ((S \setminus K(B)) \cup K(A)), \\
K(< p > A) &= \{s \mid (s, s') \in R(p), s' \in K(A)\},
\end{aligned}$$

Semantik in der dynamischen Logik II

$$
\begin{aligned}
R(\{p;q\}) &= R(p) \circ R(q) = \{(s,s') \mid (s,s'') \in R(p), (s'',s') \in R(q)\}\,, \\
R((p \cup q)) &= R(p) \cup R(q), \\
R(p^*) &= \{(s,s) \mid s \in S\} \cup R(p) \cup (R(p) \circ R(p)) \cup \ldots \\
&= \bigcup_{i \geq 0} R(p)^i \text{ (transitiver und reflexiver Abschluss von } R(p)\text{)}, \\
R(A?) &= \{(s,s) \mid s \in K(A)\}.
\end{aligned}
$$

Semantische Äquivalenz in der dynamischen Logik

Definition:
Zwei Ausdrücke A und B aus $dausd$ heißen semantisch äquivalent in der dynamischen Aussagenlogik, wenn $K(A) = K(B)$ für alle Kripke-Modelle (S, K, R) gilt.

Bezeichnung: $A \equiv_d B$

Satz:
Für beliebige Ausdrücke A und B aus $dausd$ und beliebige Programme p und q gelten die folgenden Äquivalenzen:

i) $< p > (A \vee B) \equiv_d (< p > A \vee < p > B)$,
ii) $< (p \cup q) > A \equiv_d (< p > A \vee < q > A)$,
iii) $< \{p; q\} > A \equiv_d < p >< q > A$,
iv) $< A? > B \equiv_d (A \wedge B)$.

Entscheidbarkeit in der dynamischen Logik

Satz:

Das Erfüllbarkeitsproblem der dynamischen Aussagenlogik

$Gegeben$:	Ausdruck $A \in dausd$ der dynamischen Aussagenlogik
$Frage$:	Ist A erfüllbar?

ist entscheidbar.