Logik

Übungsblatt 11
(für die 2. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2012/2013

Magdeburg, 18. Dezember 2012

1. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\exists v \forall u\, r(u,v) \rightarrow \forall x \exists y\, r(x,y))$ eine Tautologie ist.

2. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\forall x \exists y\, r(x,y) \rightarrow \exists v \forall u\, r(u,v))$ keine Tautologie ist.

3. Man beweise, dass weder $\forall x \exists y r(x,y)$ eine Folgerung von $\exists x \forall y r(x,y)$ ist, noch umgekehrt.

4. Es sei $\mathcal{S}_1$ die Signatur, die durch $K = \emptyset$, $R_2 = \{r\}$, $R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$ gegeben ist. Ferner seien

   $$A_1 = \forall x r(x,x),$$
   $$A_2 = \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x)),$$
   $$A_3 = \forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z)).$$

   Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

   a) $\{A_1, A_2, A_3\}$,
   b) $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$,
   c) $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$,
   d) $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$.

5. Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit

   $$F_1 = \{f\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$

   sowie $A = \forall x \exists y r(x,y,f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.

   a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
   b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.

6. Gegeben seien folgende prädikatenlogische Ausdrücke:

   $$A_1 = ((\forall x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x,y)),$$
   $$A_2 = ((\exists x \forall y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \exists x\, r(x,y)),$$
   $$A_3 = ((\exists x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x,y)).$$

   Geben Sie zu den obigen Ausdrücken jeweils einen semantisch äquivalenten Ausdruck in pränexer Normalform an.