

Logik

Übungsblatt 9 (für die 50. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2012/2013

Magdeburg, 4. Dezember 2012

1. Gegeben sei die Signatur \mathcal{S} mit $R_1 = \{r\}$, $F_2 = \{f\}$ und $K = F_1 = R_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$. Welche Ausdrücke gibt es über \mathcal{S} über der Variablenmenge $\text{var} = \{x, y\}$, deren Länge (als Wort betrachtet) höchstens 14 ist?

2. Legen Sie jeweils für jedes der Wörter

- a) $z(g(x), h(y))$
- b) $\forall y \exists x u(g(x), h(y))$
- c) $\exists u u(g(x), h(y))$
- d) $(\exists x f(g(x)) \wedge \forall h h(y))$

fest, ob f, g, h, u, x, y und z Konstante, Variable, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein müssen, damit es

- a) ein Term ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein Term werden kann,
- b) ein prädikatenlogischer Ausdruck ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein prädikatenlogischer Ausdruck werden kann.

3. Gegeben seien die Signatur \mathcal{S} durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} \tau(c) &= 2, & \tau(f) &= F: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) &= \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) &= R_{<} = \{(n, m) \mid n < m\} \end{aligned}$$

und die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = 2$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

- a) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
- b) $A = \forall x (r_1(f(c)) \vee r_2(x, f(x)))$,
- c) $A = \exists x (r_2(f(c), x) \wedge \neg r_2(x, f(x)))$,
- d) $A = (\exists x r_2(f(c), x) \wedge \exists x \neg r_2(x, f(x)))$.

4. Gegeben seien eine Signatur \mathcal{S} durch $K = \{k\}$, $F_1 = \{f\}$, $F_2 = \{h\}$, $R_2 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset$ sonst, eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$$\begin{aligned} U &= \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \quad (U \text{ ist also die Menge der Wörter über dem Alphabet } \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}), \\ \tau(k) &= \mathbf{abc}, \quad \tau(f)(x) = \mathbf{ax}, \quad \tau(h)(x, y) = \mathbf{bxy} \quad \text{und} \quad \tau(r) = \{(x, y) \mid \mathbf{ax} = y\} \end{aligned}$$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = \mathbf{ac}$, $\alpha(y) = \mathbf{acc}$ und $\alpha(z) = \mathbf{cc}$.

Geben Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich I und α an.

- a) $f(k)$
- b) $h(f(x), x)$
- c) $r(f(x), y)$
- d) $\exists z r(f(k), z)$
- e) $\forall z r(z, y)$

5. Beschreiben Sie formal auf zwei verschiedene Möglichkeiten den algebraischen Term $3^x + 4^y$, geben Sie jeweils Signatur und Interpretation an.