

Logik

Übungsblatt 5 (für die 46. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2012/2013

Magdeburg, 6. November 2012

1. Beweisen Sie durch äquivalentes Umformen, dass folgende aussagenlogische Ausdrücke für *beliebige* aussagenlogische Ausdrücke A, B, C und D semantisch äquivalent sind:

a) $((A \vee B) \wedge (C \vee D))$ und $\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D))$,

b) $((A \vee B) \vee (C \vee D))$ und $((A \vee C) \vee (D \vee B))$.

2. Vereinfachen Sie folgende aussagenlogische Ausdrücke durch äquivalentes Umformen.

$$A_1 = ((p_1 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \vee (p_2 \wedge (p_1 \wedge (p_1 \vee p_2))))$$

$$A_2 = (\neg p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow \neg p_2)).$$

3. Oecker ist krank und muss ins Krankenhaus. Dort wird er von einem Professor und einem Medizinstudenten untersucht. Es entwickelt sich folgende ärztliche Diskussion.

Professor: „Der Patient leidet an einer oder mehreren der folgenden Krankheiten: der Hirnversalzung, dem Gummikauzwang und der intermittierenden Nasophobie.“ Student: „Wenn er Gummikauzwang hat, dann muss er auch intermittierende Nasophobie haben.“ Professor: „Wenn er allerdings an intermittierender Nasophobie leidet, dann hat er Gummikauzwang und keine Hirnversalzung.“ Student: „Wobei man noch berücksichtigen muss, dass eine Hirnversalzung immer auch Gummikauzwang verursacht.“

a) Formalisieren Sie obige natürlichsprachige Aussagen mit einem aussagenlogischen Ausdruck A .

b) Ermitteln Sie, an welchen Krankheiten Oecker leidet.

4. Für $n \geq 1$ und aussagenlogische Ausdrücken $A_i, 1 \leq i \leq n$ führen wir die abkürzende Schreibweisen

$$\bigvee_{i=1}^n A_i = (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{i=1}^n A_i = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n)$$

ein, wobei wir (wie bei den Normalformen) auf die Klammern verzichten.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 1$, dass

$$\neg \bigvee_{i=1}^n p_i \equiv \bigwedge_{i=1}^n \neg p_i$$

gilt.

5. Zeigen Sie, dass es zu jedem aussagenlogischen Ausdruck A einen zu A semantisch äquivalenten Ausdruck gibt, für dessen Aufbau neben Variablen und Klammern nur

a) \wedge und \neg ,

b) \vee und \neg ,

c) \rightarrow und \neg verwendet werden.