Logik

Übungsblatt 1
(für die 42. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2012/2013

Magdeburg, 10. Oktober 2012

Hinweis: Diese Aufgaben gehören noch nicht zum „Pflichtteil“; sie dürfen aber votiert werden (es ist also möglich, mehr als 100 % der Aufgaben votiert zu haben).

1. Man beweise durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

2. Es sei eine geometrische Zahlenfolge (a_n) durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ für eine reelle Zahl a_1, eine reelle Zahl q und alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ definiert.

   Die dazugehörige Summenfolge (s_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

   definiert.

   Man beweise durch vollständige Induktion für $q > 1$ die explizite Darstellung der Summenfolge

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

   für alle $n \geq 1$.

3. Eine Schnecke kriecht an einer Mauer hoch. Am Tage schafft sie einen Meter, nachts rutscht sie aber wieder die Hälfte der bereits erreichten Höhe hinab. Sie beginnt an einem Morgen.

   Wir bezeichnen mit $h(n)$ die erreichte Höhe in Metern am Abend des n-ten Tages. Man zeige durch vollständige Induktion, dass die Gleichung

$$h(n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

   für alle $n \geq 1$ gilt.

4. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Syllogismen, die von Aristoteles eingeführt wurden. Welche der folgenden Syllogismen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

   Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, dass Aussagen der Form „Alle M sind P“ immer auch die Aussage „Einige M sind P“ beinhalten, d. h., das Objekt M sei nicht leer.

   a) Alle M sind P, einige M sind S, dann gilt: einige S sind P.
   b) Kein M ist P, kein S ist M, dann gilt: kein S ist P.
   c) Alle M sind P, einige S sind nicht M, dann gilt: einige S sind nicht P.
   d) Alle P sind M, einige S sind nicht M, dann gilt: einige S sind nicht P.

5. a) Es seien das Alphabet $V = \{s, \alpha, 1, \$\}$ sowie die Wörter $w = 1\alpha\$\$$ und $v = \$s\alpha s$ über V gegeben. Bestimmen Sie wv und vw sowie $\#_a(w)$, $\#_a(v)$ und $\#_a(vw)$ für alle $a \in V$.
   b) Zeigen Sie, dass in jedem Wort über dem Alphabet $\{a, b\}$ höchstens vier (verschiedene) Teilwörter der Länge 2 vorhanden sind.
   c) Geben Sie Wörter u, v, w und x über dem Alphabet $\{a, b\}$ so an, dass u genau ein, v genau zwei verschiedene, w genau drei verschiedene und x genau vier verschiedene Teilwörter der Länge 2 enthalten, und jedes der Wörter u, v, w und x dabei mindestens die Länge 6 hat.