Signatur einer prädikatenlogische Sprache

Das Alphabet einer prädikatenlogische Sprache (erster Stufe) besteht aus

– den logischen Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ and $\forall$,

– den Klammersymbolen (und) und dem Komma ,

– einer (abzählbar unendlichen) Menge var von Variablen,

– einer (abzählbaren) Menge K von Konstantensymbolen,

– einer (abzählbaren) Menge R_n von n-stelligen Relationssymbolen für jedes $n \geq 1$, und

– einer (abzählbaren) Menge F_n von n-stelligen Funktionssymbolen für jedes $n \geq 1$.

Signatur $\mathcal{S}$ einer prädikatenlogischen Sprache – $(K, R_1, F_1, R_2, F_2, \ldots)$

Terme einer prädikatenlogische Sprache

Definition:
Die Menge $T(\mathcal{S})$ der Terme über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

i) Jede Variable ist ein Term über $\mathcal{S}$ (d.h. $x \in T(\mathcal{S})$ für jede Variable $x \in var$).

ii) Jedes Konstantensymbol $c \in K$ ist ein Term über $\mathcal{S}$ (d.h. $c \in T(\mathcal{S})$ für $c \in K$).

iii) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, d.h. $f \in F_n$, und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme aus $T(\mathcal{S})$, so ist auch $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term über $\mathcal{S}$.

iv) Ein Wort liegt nur dann in $T(\mathcal{S})$, wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

Ausdrücke einer prädikatenlogische Sprache

x kommt im Wort w vollfrei vor, falls x in w vorkommt, aber weder $\forall x$ noch $\exists x$ Teilwörter von w sind.

Definition: Die Menge $A(\mathcal{S})$ der prädikatenlogischen Ausdrücke über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

i) Ist $r \in R_n$ ein n-stelliges Relationssymbol und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme aus $T(\mathcal{S})$, so ist $r(t_1, \ldots, t_n)$ ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$.

ii) Sind A und B prädikatenlogische Ausdrücke aus $A(\mathcal{S})$, so sind auch $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ prädikatenlogische Ausdrücke über $\mathcal{S}$.

iii) Ist A ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$ und kommt die Variable x in A vollfrei vor, so sind auch $\forall x A$ und $\exists x A$ prädikatenlogische Ausdrücke über $\mathcal{S}$.

iv) Ein Wort liegt nur dann in $A(\mathcal{S})$, wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

Basisausdrücke

Definition:
Ein Literal über der Signatur $\mathcal{S}$ ist ein prädikatenlogischer Ausdruck der Form $r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ oder $\neg r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, wobei $n \geq 1$ ist, r ein n-stelliges Relationssymbol ist und $t_i \in T(\mathcal{S})$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Definition:
Für einen prädikatenlogischen Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir die Menge $B(A)$ der Basisausdrücke von A als die Menge aller Teilwörter $r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ von A, bei denen $n \geq 1$ gilt, r ein n-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, t_2, \ldots t_n$ Terme über $\mathcal{S}$ sind.

Prädikatenlogische Sprache – Beispiel 1

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c, d\},\ R_1 = \{r\},\ R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$T(\mathcal{S}_1) = \{c, d\} \cup var$

$r(c)$, $r(d)$ und $r(x)$ mit $x \in var$ sind die Literale über $\mathcal{S}_1$,
$((r(x) \wedge r(y)) \vee r(c)) \in A(\mathcal{S}_1)$ mit $x, y \in var$,
$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \to (r(x)) \in A(\mathcal{S}_1)$ mit $x, y \in var$,
$\forall z((r(x) \wedge r(z)) \vee r(c)) \in A(\mathcal{S}_1)$ mit $x \in var$,
$\exists x((r(x) \to r(y)) \leftrightarrow (r(c)) \in A(\mathcal{S}_1)$ mit $y \in var$,
$\forall z((\forall x r(x) \wedge \exists y r(y)) \vee r(z)) \in A(\mathcal{S}_1)$,

$\forall y((\forall y r(y) \wedge \exists z r(z)) \vee r(z)) \notin A(\mathcal{S}_1)$,
$\forall r\ r(c) \notin A(\mathcal{S}_1)$

Prädikatenlogische Sprache – Beispiele 2 und 3

$\mathcal{S}_2$ mit $R_2 = \{r\},\ F_1 = \{f\},\ R_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$T(\mathcal{S}_2) = \{\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\ mal}(x)\ldots)) \mid x \in var,\ n \geq 0\}$

$r(\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\ mal}(x)\ldots)), \underbrace{f(f(\ldots f}_{m\ mal}(y)\ldots))) \in A(\mathcal{S})$, $x, y \in var$, $n, m \in \mathbf{N}_0$,

$B_1 = \forall x\ r(x, f(x)) \in A(\mathcal{S}_2)$,
$B_2 = \forall x\ \neg r(x, x) \in A(\mathcal{S}_2)$,
$B_3 = \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z)) \in A(\mathcal{S}_2)$,

$\forall x\ f(f(x)) \notin A(\mathcal{S}_2)$

$\mathcal{S}_3$ mit $K = \{e\},\ F_1 = \{h\},\ R_1 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 2$

$T(\mathcal{S}_3) = \{\underbrace{h(h(\ldots h}_{n\ mal}(x)\ldots)) \mid n \geq 0, x \in var$ oder $x = e\}$, $\quad A(\mathcal{S}_3) = \emptyset$

Interpretation

Definition:
Sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer pädikatenlogischen Sprache. Unter einer Interpretation I von $\mathcal{S}$ verstehen wir ein Paar $I = (U, \tau)$, wobei U eine nichtleere Menge ist und τ eine Abbildung ist, die

- jedem Konstantensymbol $c \in K$ ein Element $\tau(c) \in U$ zuordnet,
- jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in F_n$ eine n-stellige Funktion $\tau(f) : U^n \to U$ zuordnet, und
- jedem n-stelligen Relationssymbol $r \in R_n$ eine n-stellige Relation $\tau(r) \subseteq U^n$ zuordnet.

Unter einer Belegung α bez. der Interpretation I verstehen wir eine Funktion, die jeder Variablen x ein Element $\alpha(x) \in U$ zuordnet.

Wert eines prädikatenlogischen Terms

$\mathcal{S}$ – Signatur einer prädikatischen Sprache,
$I = (U, \tau)$ – Interpretation von $\mathcal{S}$,
α – Belegung bez. I.

Definition:
Wir definieren den Wert $w_\alpha^I(t) \in U$ für $t \in T(\mathcal{S})$ induktiv durch:

- $w_\alpha^I(x) = \alpha(x)$ für eine Variable x.
- $w_\alpha^I(c) = \tau(c)$ für ein Konstantensymbol c.
- Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und haben für $1 \leq i \leq n$ die Terme t_i die Werte $w_\alpha^I(t_i)$, so gilt

$$w_\alpha^I(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \tau(f)(w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \ldots w_\alpha^I(t_n))\,.$$

Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks

$\mathcal{S}$ – Signatur, $I = (U, \tau)$ – Interpretation von $\mathcal{S}$, α – Belegung bez. I

Definition: Wir definieren den Wert $w_\alpha^I(A) \in \{0,1\}$ für $A \in A(\mathcal{S})$ induktiv durch:

- Für $r \in R_n$ und $t_i \in T(\mathcal{S})$, $1 \leq i \leq n$, setzen wir
  $w_\alpha^I(r(t_1, t_2, \ldots t_n)) = 1$ genau dann, wenn
  $(w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \ldots, w_\alpha^I(t_n)) \in \tau(r)$.

- Für $A \in A(\mathcal{S})$ und $B \in A(\mathcal{S})$ setzen wir
  $w_\alpha^I(\neg A) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \wedge B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 1$,
  $w_\alpha^I((A \vee B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \rightarrow B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = 1$ und $w_\alpha^I(B) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \leftrightarrow B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B)$.

Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks – Fortsetzung

- Für $A \in A(\mathcal{S})$ und in A vollfrei vorkommendes x setzen wir
  - $w_\alpha^I(\forall x A) = 1$ genau dann, wenn für jedes $d \in U$ die Beziehung $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$ erfüllt ist,
  - $w_\alpha^I(\exists x A) = 1$ genau dann, wenn es ein $d \in U$ mit $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$ gibt.

Dabei definieren wir für eine Belegung α bez. $I = (U, \tau)$, eine Variable x und ein $d \in U$ die Belegung $\alpha_{x,d}$ bez. I durch

$$\alpha_{x,d}(y) = \begin{cases} d & \text{für } y = x \\ \alpha(y) & \text{für } y \neq x \end{cases} .$$

Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 1

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c, d\}$, $R_1 = \{r\}$, $R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$I = (U, \tau)$ mit $U = \mathbb{N}$, $\tau(c) = 2$, $\tau(d) = 3$, $\tau(r) = \{n \mid n$ is gerade$\}$

$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))$

α mit $\alpha(x) = 2$ und $\alpha(y) = 4$ $\qquad$ α' mit $\alpha'(x) = 5$ und $\alpha'(y) = 5$

Nr.	Ausdruck A	$w^I_\alpha(A)$	$w^I_{\alpha'}(A)$	Begründung
a)	$r(c)$	1	1	da 2 gerade ist
b)	$\neg r(y)$	0	1	da 4 gerade und 5 gerade ist
c)	$(r(c) \wedge \neg r(y))$	0	1	wegen a) und b)
d)	$r(x)$	1	0	da 2 gerade und 5 ungerade ist
e)	A	1	0	wegen c) und d)

$w^I_\gamma(\exists x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x)) = 1$

$w^I_\gamma(\forall x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x)) = 0$

Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 2

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c, d\},\ R_1 = \{r\},\ R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$J = (U, \tau)$ mit $U = \mathbb{R},\ \tau(c) = -1,\ \tau(d) = 2,\ \tau(r) = \{n \mid n \geq 0\}$

$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \to r(x))$

α mit $\alpha(x) = \pi$ und $\alpha(y) = -4$ $\qquad$ α' mit $\alpha'(x) = 3,14$ und $\alpha'(y) = 4$

Nr.	Ausdruck A	$w_\alpha^J(A)$	$w_{\alpha'}^J(A)$	Begründung
a')	$r(c)$	0	0	da $-1 < 0$
b')	$\neg r(y)$	1	0	da $-4 < 0$ und $4 \geq 0$
c')	$(r(c) \wedge \neg r(y))$	0	0	wegen a') und b')
d')	$r(x)$	1	1	da $\pi \geq 0$ und $3,14 \geq 0$
e')	A	1	1	wegen c') und d')

$w_\gamma^J(\forall x((r(c) \wedge \neg r(y)) \to r(x))) = 1$

$w_\gamma^J(\exists x((r(c) \wedge \neg r(y)) \to r(x))) = 1$

Tautologie – Kontradiktion –Erfüllbarkeit

Definition: i) Ein Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar) bez. einer Interpretation I von $\mathcal{S}$, falls für jede Belegung α bez. I die Beziehung $w_\alpha^I(A) = 1$ (bzw. $w_\alpha^I(A) = 0$) gilt. A heißt erfüllbar bez. I, falls es eine Belegung α bez. I mit $w_\alpha^I(A) = 1$ gibt.

ii) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Ausdrücken über $\mathcal{S}$. Eine Interpretation I von $\mathcal{S}$ heißt Modell für $\mathcal{A}$, falls jeder Ausdruck von $\mathcal{A}$ eine Tautologie bez. I ist.

iii) Ein Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar), falls A Tautologie (bzw. Kontradiktion) bez. jeder Interpretation von $\mathcal{S}$ ist. Ein Ausdruck A über $\mathcal{S}$ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation I von $\mathcal{S}$ und eine Belegung α bez. I mit $w_\alpha^I(A) = 1$ gibt.

Semantische Äquivalenz 1

Definition: Zwei prädikatenlogische Ausdrücke A und B über der Signatur $\mathcal{S}$ heißen semantisch äquivalent, falls für jede Interpretation I von $\mathcal{S}$ und jede Belegung α bez. I die Beziehung $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B)$ gilt.

Folgerung: Zwei prädikatenlogische Ausdrücke A und B über der Signatur $\mathcal{S}$ sind genau dann semantisch äquivalent, wenn $(A \leftrightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Lemma: Es seien A und B aussagenlogische Ausdrücke mit $var(A) \cup var(B) \subseteq \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$. Ferner seien $C_1, C_2, \ldots C_n$ prädikatenlogische Ausdrücke über einer Signatur $\mathcal{S}$ und A' und B' die prädikatenlogische Ausdrücke, die aus A und B entstehen, indem man für $1 \leq i \leq n$ jedes Vorkommen von p_i durch C_i ersetzt. Dann gelten folgende Aussagen.

i) Ist A eine Tautologie, so ist auch A' eine Tautologie.

ii) Aus $A \equiv B$ folgt $A' \equiv B'$.

Semantische Äquivalenz 2

Lemma: Sind A und B beliebige prädikatenlogische Ausdrücke, so gelten die folgenden semantischen Äquivalenzen:

i) $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$,
ii) $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$,
iii) $(\forall x A \wedge \forall x B) \equiv \forall x (A \wedge B)$,
iv) $(\exists x A \vee \exists x B) \equiv \exists x (A \vee B)$,
v) $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$,
vi) $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$.

Kommt überdies x in B nicht vor, so gelten noch

vii) $(\forall x A \wedge B) \equiv \forall x (A \wedge B)$,
viii) $(\forall x A \vee B) \equiv \forall x (A \vee B)$,
ix) $(\exists x A \wedge B) \equiv \exists x (A \wedge B)$,
x) $(\exists x A \vee B) \equiv \exists x (A \vee B)$.

Substitutionen

Seien s ein Term über $\mathcal{S}$, A ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$, x eine Variable und t ein Term über $\mathcal{S}$, der x nicht enthält.

$sub(s,x,t)$ und $sub(A,x,t)$ entstehen aus s bzw. A, indem jedes freie Vorkommen von x in s bzw. A durch t ersetzt wird.

α sei eine Belegung bez. einer Interpretation I von $\mathcal{S}$

$$\alpha_{x,t}(y) = \begin{cases} \alpha(y) & y \neq x \\ w_\alpha^I(t) & y = x \end{cases}$$

Lemma: i) $w_\alpha^I(sub(s,x,t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(s)$
ii) $w_\alpha^I(sub(A,x,t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(A)$.

Lemma: Sei $A = QxB$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$ ein prädikatenlogischer Ausdruck über einer Signatur $\mathcal{S}$. Ferner sei y eine Variable, die in A nicht vorkommt. Dann gilt

$$Qx\ B \equiv Qy\ sub(B,x,y)\,.$$

Pränexe Normalform

Definition:
Wir sagen, dass ein prädikatenlogischer Ausdruck A in pränexer Normalform ist, wenn folgende Bedingungen gelten:

– $A = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nA'$ für ein $n \geq 0$,

– $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ für $1 \leq i \leq n$,

– für $1 \leq i \leq n$ ist x_i eine Variable und

– in A' kommen $\forall$ und $\exists$ nicht vor.

Satz:
Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck A gibt es einen zu A semantisch äquivalenten prädikatenlogischen Ausdruck B in pränexer Normalform.

Pränexe Normalform – Beispiel

$((\neg\forall x r(x,y) \vee \exists x s(h(x))) \wedge \forall y \neg p(x,f(y)))$

a) $r(x,y)$, $s(h(x))$ und $\neg p(x,f(y))$ sind pränexe Normalformen.

b) $\neg\forall x r(x,y)$ hat pränexe Normalform $\exists x \neg r(x,y)$
$\exists x s(h(x))$ pränexe Normalform
$\forall y \neg p(x,g(y))$ pränexe Normalformen

c) $$\begin{aligned}(\neg\forall x r(x,y) \vee \exists x s(h(x))) &\equiv (\exists x \neg r(x,y) \vee \exists x s(h(x)))\\ &\equiv (\exists w \neg r(w,y) \vee \exists v s(h(v)))\\ &\equiv \exists w(\neg r(w,y) \vee \exists v s(h(v)))\\ &\equiv \exists w \exists v(\neg r(w,y) \vee s(h(v)))\end{aligned}$$

Pränexe Normalform – Beispiel – Fortsetzung

d) $((\neg\forall x r(x,y) \vee \exists x s(h(x))) \wedge \forall y \neg p(x,f(y)))$

$$\begin{aligned}
&\equiv (\exists w \exists v(\neg r(w,y) \vee s(h(v))) \wedge \forall y \neg p(x,f(y)))\\
&\equiv (\exists w \exists v(\neg r(w,y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x,f(z)))\\
&\equiv \exists w (\exists v(\neg r(w,y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x,f(z)))\\
&\equiv \exists w \exists v((\neg r(w,y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x,f(z)))\\
&\equiv \exists w \exists v \forall z((\neg r(w,y) \vee s(h(v))) \wedge \neg p(x,f(z)))
\end{aligned}$$

Pränexe Normalform 2

$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA'$ – pränexe Normalform

A' entsteht aus Basisausdrücken mittels Anwendung der aussagenlogischen Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

A' entsteht aus einem aussagenlogischen Ausdruck B, indem jedes Vorkommen einer Variablen in B durch einen Basisausdruck $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ ersetzt wird.

K_B – konjunktive Normalform zu B und $K_{A'}$ – analog gebildeter Ausdruck

$K_{A'} = (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_r)$,
$D_i = (D_{i,1} \vee D_{i,2} \vee \ldots \vee D_{i,s_i})$ für $1 \leq i \leq r$,
$D_{i,j} = r(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \ldots, t_{i,j,k_{i,j}})$ oder $D_{i,j} = \neg r(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \ldots, t_{i,j,k_{i,j}})$
für $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s_i$ und gewisse s, s_i, $k_{i,j}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s_i$.

$K_{A'}$ – "konjunktive" Normalform von A'.

Skolemform – Definition 1

Definition:
Für einen prädikatenlogischen Ausdruck

$$A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y G\,,$$

mit $n \geq 0$ und pränexer Normalform G und ein n-stelliges Funktionssymbol f, das in G nicht vorkommt, setzen wir

$$sk(A, f) = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n sub(G, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))\,.$$

Skolemform – Beispiele

Beispiel 1: $A = \forall x \exists y(\neg R(x,x) \vee R(y,y))$

Elimination von $\exists y$

$n = 1$, f einstellig,

$sk(A,f) = \forall x(\neg R(x,x) \vee R(f(x), f(x)))$

Beispiel 2: $B = \forall x \exists y \forall z \exists w(R(a,y) \wedge \neg S(f(x), w, z))$

a) Elimination von $\exists y$

$n = 1$, g einstellig

$sk(B,g) = \forall x \forall z \exists w(R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), w, z))$

b) Elimination von $\exists w$

$n = 2$, h zweistellig

$sk(sk(B,g),h) = \forall x \forall z(R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), h(x,z), z))$

Skolemform – Definition 2

Definition:
Für eine pränexe Normalform A definieren wir die (bis auf Bezeichnung der Funktionssymbole eindeutig bestimmte) Skolemform $sk(A)$ als das Resultat des folgenden Algorithmus:

> Solange A einen Existenzquantor enthält, setze $A = sk(A, f)$ für ein nicht in A vorkommendes Funktionssymbol f.

$$sk(A) = sk(A, f) = \forall x(\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))$$

$$sk(B) = sk(sk(B, g), h) = \forall x \forall z(R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), h(x, z), z))$$

Skolemform – semantische Äquivalenz

$A = \forall x \exists y (\neg R(x,x) \vee R(y,y))$

$$\begin{aligned} A &\equiv \forall x(\neg R(x,x) \vee \exists y R(y,y)) \\ &\equiv (\forall x \neg R(x,x) \vee \exists y R(y,y)) \\ &\equiv (\neg \exists x R(x,x) \vee \exists y R(y,y)) \end{aligned}$$

$w_\alpha^I(A) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(\neg\exists x R(x,x)) = 0$ und $w_\alpha^I(\exists y R(y,y)) = 0$

$w_\alpha^I(A) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(\exists x R(x,x)) = 1$ und $w_\alpha^I(\exists y R(y,y)) = 0$

$\underline{w_\alpha^I(A) = 1}$ für beliebige α bez. beliebigem I

Skolemform – semantische Äquivalenz – Fortsetzung

$A = \forall x \exists y(\neg R(x,x) \vee R(y,y))$

$sk(A) = \forall x(\neg R(x,x) \vee R(f(x),f(x)))$

$J = (\mathbb{N},\tau)$ – Interpretation mit $\tau(f)(n) = n+2$ und $\tau(R) = \{(1,1)\}$
$(1,1) \in \tau(R)$ und $(f(1),f(1)) = (3,3) \notin \tau(R)$

α – Belegung bez. J
$w^J_{\alpha_{x,1}}(\neg R(x,x)) = 0$ und $w^J_{\alpha_{x,1}}(R(f(x),f(x))) = 0$
$w^J_{\alpha_{x,1}}((\neg R(x,x) \vee R(f(x),f(x))) = 0$
$w^J_{\alpha}(\forall x(\neg R(x,x) \vee R(f(x),f(x))) = \underline{w^J_{\alpha}(sk(A)) = 0}$

Skolemform – Erfüllbarkeitsäquivalenz

Lemma:
Seien $A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y G$ ein prädikatenlogischer Ausdruck mit $n \geq 0$ und pränexer Normalform G und f ein n-stelliges Funktionssymbol, das in G nicht vorkommt. Dann ist A genau dann erfüllbar, wenn $sk(A, f)$ erfüllbar ist.

Satz:
Eine pränexe Normalform A ist genau dann erfüllbar, wenn ihre Skolemform $sk(A)$ erfüllbar ist.

Bereinigte Skolemform

Lemma:
Sei A ein prädikatenlogischer Ausdruck, in dem die Variable x vollfrei vorkommt. Dann ist A genau dann erfüllbar, wenn $\exists x A$ erfüllbar ist.

Definition:
Ein prädikatenlogischer Ausdruck A hat <u>bereinigte Skolemform</u>, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

– $A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A'$ für ein $n \geq 0$,

– A' enthält keine Existenz- und Allquantoren,

– in A' kommen nur die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vor.

Satz:
Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck A gibt es einen prädikatenlogischen Ausdruck in bereinigter Skolemform, der genau dann erfüllbar ist, wenn A erfüllbar ist.