Logik

Übungsblatt 10
(für die 51. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2011/2012

Magdeburg, 13. Dezember 2011

1. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \{a,b\}^*$ und

$$\begin{aligned}
&\tau(c) = ab,\\
&\tau(f) = F\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^* \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \begin{cases} aau' & \text{für } u = au',\\ u & \text{sonst,}\end{cases}\\
&\tau(r_1) = \{u \in \{a,b\}^* \mid u \text{ beginnt mit } a\},\\
&\tau(r_2) = \{(u,v) \bigm| |u| \leq |v|\}
\end{aligned}$$

sowie die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = bb$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

a) $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
b) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
c) $A = \forall x (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
d) $A = \exists x (r_1(f(x)) \wedge r_2(f(x), x))$,
e) $A = (\exists x r_1(f(x)) \wedge \exists x r_2(f(x), x))$.

2. Man beweise, dass weder $\forall x \exists y r(x,y)$ eine Folgerung von $\exists x \forall y r(x,y)$ ist, noch umgekehrt.

3. Es sei $\mathcal{S}_1$ die Signatur, die durch $K = \emptyset$, $R_2 = \{r\}$, $R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$ gegeben ist. Ferner seien

$$\begin{aligned}
A_1 &= \forall x r(x,x),\\
A_2 &= \forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x)),\\
A_3 &= \forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z)).
\end{aligned}$$

Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

a) $\{A_1, A_2, A_3\}$,
b) $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$,
c) $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$,
d) $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$.

4. Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit

$$F_1 = \{f\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$

sowie $A = \forall x \exists y r(x, y, f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.

a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.

5. Gegeben seien folgende prädikatenlogische Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
A_1 &= ((\forall x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x,y)),\\
A_2 &= ((\exists x \forall y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \exists x\, r(x,y)),\\
A_3 &= ((\exists x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x,y)).
\end{aligned}$$

Geben Sie zu den obigen Ausdrücken jeweils einen semantisch äquivalenten Ausdruck in pränexer Normalform an.