Logik

Übungsblatt 9
(für die 50. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2011/2012

Magdeburg, 6. Dezember 2011

1. Es sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Geben Sie die Definition der Begriffe
   - Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Belegung bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Terms bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung α,
   - Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung α.

2. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{array}{ll} \tau(c) = 2, & \tau(f) = F\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) = \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) = R_< = \{(n,m) \mid n < m\} \end{array}$$

   und die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = 2$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

   a) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   b) $A = \forall x(r_1(f(c)) \vee r_2(x, f(x)))$,
   c) $A = \exists x(r_2(f(c), x) \wedge \neg r_2(x, f(x)))$,
   d) $A = (\exists x r_2(f(c), x) \wedge \exists x \neg r_2(x, f(x)))$.

3. Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Tautologien sind, falls A und B beliebige prädikatenlogische Ausdrücke sind.

   a) $(\forall x A \to \exists x A)$
   b) $(\exists x A \to \forall x A)$
   c) $(\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B))$
   d) $(\forall x(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B))$
   e) $(\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B))$
   f) $(\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B))$

4. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\exists v \forall u\, r(u,v) \to \forall x \exists y\, r(x,y))$ eine Tautologie ist.

5. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\forall x \exists y\, r(x,y) \to \exists v \forall u\, r(u,v))$ keine Tautologie ist.