Logik

Übungsblatt 6
(für die 47. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2011/2012

Magdeburg, 15. November 2011

1. Bestimmen Sie semantisch äquivalente Ausdrücke in konjunktiver Normalform sowie semantisch äquivalente Ausdrücke in disjunktiver Normalform zu den folgenden Ausdrücken. Verwenden Sie dabei je einmal den Algorithmus über die Wahrheitstabellen sowie je einmal die Methode des semantisch äquivalenten Umformens.

$$A_1 = ((p_1 \to p_2) \wedge p_3),$$
$$A_2 = ((p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \vee p_3)),$$
$$A_3 = (((p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \to p_2)) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3)).$$

2. Geben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe wider.

   a) *Klausel*,
   b) *Resolvente* von Klauseln,
   c) $\mathrm{res}(K)$ für eine Menge K von Klauseln,
   d) $\mathrm{res}^n(K)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ für eine Menge K von Klauseln sowie
   e) $\mathrm{res}^*(K)$ für eine Menge K von Klauseln.

3. Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2, 3$

$$\mathrm{res}^k(\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}, \{\neg r\}\}).$$

4. Bestimmen Sie $\mathrm{res}^*(K)$ für

$$K = \{\{p, q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}, \{\neg r\}\}.$$

5. Zeigen Sie, dass es zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, eine Klauselmenge K über der Variablenmenge $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, für die $\mathrm{res}^{n-1}(K) \neq \mathrm{res}^n(K) = \mathrm{res}^*(K)$ gilt.

6. Es sei K eine beliebige Klauselmenge über $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Man zeige: Wenn jede Klausel in K höchstens zwei Elemente enthält, enthält $\mathrm{res}^*(K)$ höchstens $2n^2 + n + 1$ Klauseln.