Logik

Übungsblatt 5
(für die 46. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2011/2012

Magdeburg, 8. November 2011

1. Vereinfachen Sie folgende aussagenlogische Ausdrücke durch äquivalentes Umformen.

$$A_1 = ((p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_1)) \wedge (p_1 \vee \neg p_1)),$$
$$A_2 = ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))),$$
$$A_3 = ((p_1 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \vee (p_2 \wedge (p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)))),$$
$$A_4 = (\neg p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow \neg p_2)).$$

2. Für $n \geq 1$ und aussagenlogische Ausdrücken A_i, $1 \leq i \leq n$ führen wir die abkürzende Schreibweisen

$$\bigvee_{i=1}^{n} A_i = (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} A_i = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n)$$

ein, wobei wir (wie bei den Normalformen) auf die Klammern verzichten.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 1$, dass

$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg p_i$$

gilt.

3. Zeigen Sie, dass es zu jedem aussagenlogischen Ausdruck A einen zu A semantisch äquivalenten Ausdruck gibt, für dessen Aufbau neben Variablen und Klammern nur

   a) $\wedge$ und $\neg$,
   b) $\vee$ und $\neg$,
   c) $\rightarrow$ und $\neg$ verwendet werden.

4. Beweisen Sie, dass es einen aussagenlogischen Ausdruck A gibt, zu dem kein zu A semantisch äquivalenter Ausdruck existiert, für dessen Aufbau nur Variablen, Klammern, $\wedge$ und $\vee$ verwendet werden.

5. Eine Alternative $B = (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ heißt *positiv*, wenn alle B_i, $1 \leq i \leq n$, Variable sind.

   Eine Alternative $B = (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ heißt *negativ*, wenn alle B_i, $1 \leq i \leq n$, negierte Variable sind.

   a) Beweisen Sie, dass jeder aussagenlogische Ausdruck $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$ in konjunktiver Normalform, in dem keine der Alternativen A_i, $1 \leq i \leq m$, positiv ist, erfüllbar ist.
   b) Beweisen Sie, dass jeder aussagenlogische Ausdruck $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$ in konjunktiver Normalform, in dem keine der Alternativen A_i, $1 \leq i \leq m$, negativ ist, erfüllbar ist.