Prof. Dr. Jürgen Dassow
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik

P E T R I — N E T Z E

Vorlesungsskript

Magdeburg, Oktober 2010 – Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

Bei der ersten Folge w_1 essen nur der nullte und der zweite Philosoph. Der dritte und vierte Philosoph haben zwar unendlich oft die Chance zum Essen, aber sie wird ihnen stets durch den nullten bzw. zweiten Philosophen genommen. Der erste Philosoph dagegen hat nicht einmal die Chance, zwei Gabeln aufzunehmen. Dies bedeutet, dass drei der Philosophen denkend verhungern müssen. Das Verhalten von den beiden essenden Philosophen kann nicht als fair oder gerecht bezeichnet werden.

Bei der zweiten Folge ist die Situation völlig anders. Jeder der Philosophen kann die Chance zum Essen auch nutzen und isst während des Ablaufs der Folge sogar „unendlich" oft. Dieser Ablauf benachteiligt keinen Philosophen, ist also gerecht/fair.

Bei der dritten Folge kommt zwar jeder der Philosophen „unendlich" oft mal zum Essen, aber die Abstände zwischen zwei Essen werden für den ersten, dritten und vierten Philosophen werden beliebig lang, was praktisch auch zum Verhungern dieser drei Philosophen führt.

In diesem Abschnitt wollen wir einige Konzepte einführen, die die Gerechtigkeit/Fairness/Parteilichkeit von Abläufen in Petri-Netzen beschreiben können.

Definition 3.79 *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $w = t_1t_2 \cdots = (t_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche Folge von Transitionen aus T. Wir nennen w einen Ablauf in N, wenn es eine unendliche Folge $m_1, m_2, \ldots$ von Markierungen von N derart gibt, dass für $i \geq 1$ die Beziehungen*

$$t_i^- \leq m_{i-1} \text{ und } m_{i+1} = m_i + \Delta(t_i)$$

gelten.

Entsprechend der Definition kann die unendliche Folge (t_i) also geschaltet werden und dabei gilt

$$m_0\,[t_1 > m_1\,[t_2 > m_2\,[t_3 > m_3\,[t_4 > \ldots [t_i > m_i\,[t_{i+1} \ldots$$

Für einen gegebenen Ablauf $w = (t_i)$ werden wir die zugehörige unendliche Folge von Markierungen mit (m_i^w) bezeichnen. Es gelten dann $m_i^w = m_0 + \Delta(t_1t_2 \ldots t_i)$ für $i \geq 1$ und $m_j^w = m_i^w + \Delta(t_{i+1}t_{i+2} \ldots t_j)$ für $j > i \geq 1$.

Aus der Definition eines Ablaufs erhalten wir sofort die folgende Aussage.

Folgerung 3.80 *Eine unendliche Folge $w = (t_i)$ von Transitionen eines Petri-Netzes N ist genau dann ein Ablauf in N, wenn für jedes $i \geq 1$ die Folge $t_1t_2 \ldots t_i$ in $L(N, m_0)$ liegt.* □

Die drei Folgen aus (3.2), (3.3) und (3.4) sind Abläufe im Netz der fünf Philosophen aus Abbildung 1.5.

Satz 3.81 *Für ein Petri-Netz N ist es entscheidbar, ob es einen Ablauf in N gibt.*

Beweis. Wir untersuchen zuerst, ob N beschränkt ist. Ist N unbeschränkt, so gibt es offenbar einen Ablauf, da wir auf mindestens eine Stelle eine beliebig große Anzahl von Marken bringen müssen.

Ist N beschränkt, so berechnen wir den Erreichbarkeitsgraphen von N. Ein Ablauf entspricht einem unendlichen Weg im Erreichbarkeitsgraphen. Die Existenz unendlicher Wege in einem Graphen ist genau dann gegeben, wenn der Graph einen Kreis enthält. Es bleibt daher nur zu testen, ob der Erreichbarkeitsgraph von N einen Kreis enthält. Dies kann mit Varianten von Breitensuche oder Tiefensuche geschehen. □

Definition 3.82 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und $w = (t_i)$ ein Ablauf in N.*

i) Wir nennen w unparteilich (bez. T')*, wenn jede Transition (aus T') in w unendlich oft mal vorkommt.*

ii) Wir nennen w gerecht (bez. T')*, wenn für jede Transition t (aus T') Folgendes gilt: Wenn für fast alle[2] $i \geq 1$ die Beziehung $t^- \leq m_{i-1}^w$ erfüllt ist, so kommt t unendlich oft mal in w vor.*

iii) Wir nennen w fair (bez. T')*, wenn für jede Transition t (aus T') Folgendes gilt: Wenn für unendlich viele $i \geq 1$ die Beziehung $t^- \leq m_{i-1}^w$ erfüllt ist, so kommt t unendlich oft mal in w vor.*

Bei der Gerechtigkeit und Fairness wird im Gegensatz zur Unparteilichkeit nur gefordert, dass eine Transition unendlich oft mal vorkommt, wenn diese Transition unendlich oft mal aktiviert ist. Ist eine Transition nur endlich oft mal aktiviert, so braucht sie bei Gerechtigkeit und Fairness nicht betrachtet zu werden (oder anders, für eine derartige Transition sind die Bedingungen für Gerechtigkeit und Fairness stets erfüllt). Der Unterschied zwischen Gerechtigkeit und Fairness besteht darin, dass bei der Gerechtigkeit die Transition von einem Moment an stets aktiviert sein muss, während bei der Fairness die Transition nicht von einem Zeitpunkt an ständig, aber unendlich oft mal aktiviert sein muss.

Wir betrachtet nun die Abläufe w_1 und w_2 aus (3.2) und (3.3) im Netz der fünf Philosophen aus Abbildung 1.5.

Der Ablauf w_1 ist unparteilich bezüglich $\{h_0, h_2\}$ (weil diese beiden Transitionen unendlich oft mal in w_1 vorkommen), während w_1 parteilich (bez. der Menge T aller Transitionen) ist (da z.B. h_1 hierin überhaupt nicht, also erst recht nicht unendlich oft mal vorkommt). Die Folge w_1 ist gerecht, denn die Transitionen n_0, h_0, n_1, h_1 kommen in der Folge unendlich oft vor und keine der restlichen Transitionen ist für fast alle $i \geq 1$ aktiviert. Außerdem ist w_1 fair bezüglich $\{n_0, n_1, n_2\}$, da n_0 und n_2 unendlich oft in w_1 vorkommen und n_1 nie aktiviert ist. Dagegen ist w_1 nicht fair bezüglich $\{n_0, n_3\}$, da n_3 unendlich oft aktiviert ist (immer nach dem Schalten von h_2), aber nicht unendlich oft mal in w_1 vorkommt.

Der Ablauf w_2 ist offensichtlich unparteilich, gerecht und fair.

Wir geben nun zwei einfache Beziehungen zwischen den in Definition 3.82 gegebenen Konzepten.

Lemma 3.83 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und w ein Ablauf in T.*

i) Wenn w unparteilich (bez. T') ist, dann ist w fair (bez. T').

ii) Wenn w fair (bez. T') ist, dann ist w gerecht (bez. T').

Beweis. i) folgt sofort aus den Definitionen.

ii) Es sei w ein Ablauf. Wenn t für fast alle m_i^w aktiviert ist, so ist t unendlich oft aktiviert. Aus der Fairness von w folgt nun, dass t unendlich oft mal in w vorkommt. Damit ist w als gerecht nachgewiesen. □

[2]Eine Aussage gilt für fast alle $i \geq 0$, wenn sie nur für endlich viele i nicht gilt. Dies bedeutet, dass es ein j so gibt, dass die Aussage für alle $i \geq j$ gilt.

Wir diskutieren nun die Umkehrbarkeit der Aussagen aus Lemma 3.83. Aus unseren Beispielen ist zu ersehen, dass die Umkehrungen im Allgemeinen nicht gelten. Jedoch sind sie unter schwachen Zusatzvoraussetzungen gültig.

Satz 3.84 *Wenn das Petri-Netz N konfliktfrei ist, dann ist jeder gerechte Ablauf auch fair.*

Beweis. Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies Petri-Netz, t eine Transition aus T und m eine erreichbare Markierung, bei der t aktiviert ist. Ferner sei m' eine von m durch Schalten von $t' \neq t$ erreichbare Markierung. Da N konfliktfrei ist, ist die Menge $\{t, t'\}$ nebenläufig. Nach Folgerung 3.15 sind dann tt' und $t't$ Schaltfolgen für m. Daher ist t auch bei m' aktiviert. Dieser Prozess kann fortgesetzt werden. Damit ist gezeigt, dass eine Markierung, bei der t nicht aktiviert ist, nur dann erreicht werden kann, wenn t in der zugehörigen Schaltfolge enthalten ist.

Es sei nun w ein gerechter Ablauf in N. Falls t für fast alle m_i^w aktiviert ist, so kommt t wegen der Gerechtigkeit von w in w unendlich oft vor. Sei t nun für unendlich viele, aber nicht für fast alle m_i^w aktiviert. Dann muss t immer wieder schalten, da sonst t von einem i an immer und damit für fast alle m_i^w aktiviert wäre. Damit kommt t unendlich oft mal in w vor. □

Lemma 3.85 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies Petri-Netz, t und t' zwei Transitionen aus T, q ein Wort über T, in dem t nicht vorkommt und m eine erreichbare Markierung mit $(t')^- \leq m$ und $qt \in L(N, m)$. Dann existiert ein Wort r über T mit folgenden Eigenschaften: t vorkommt in r nicht vor, $|r| \leq |q|$ und $t'rt \in L(N, m)$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass t' in q nicht vorkommt. Wir zeigen durch Induktion über die Länge von q, dass $qt \in L(N, m + \Delta(t'))$. Für $q = \lambda$ folgt die Aussage daraus, dass dann t und t' bei m aktiviert sind und wegen der Konfliktfreiheit das Wort $t't$ geschaltet werden kann (siehe Folgerung 3.15). Die Induktionsvoraussetzung ist dann, dass

$$qt \in L(N, m),\ (t')^- \leq m,\ \#_{t'}(q) = 0 \text{ impliziert } qt \in L(N, m + \Delta(t')).$$

Wir haben die Induktionsbehauptung

$$t^*qt \in L(N, m),\ (t')^- \leq m,\ \#_{t'}(q) = 0 \text{ impliziert } t^*qt \in L(N, m + \Delta(t'))$$

für jedes $t^* \in T$ zu zeigen (wir vergrößern die Länge von q durch Anfügen eines Buchstaben t^* zu Beginn des Wortes). Wegen $t^*qt \in L(N, m)$ ist t^* bei m aktiviert und es gilt $qt \in L(N, m + \Delta(t^*))$. Da t' bei m ebenfalls aktiviert ist, kann wegen der Konfliktfreiheit t^*t'geschaltet werden. Damit ist t' bei $m + \Delta(t^*)$ aktiviert. Aus der Induktionsvoraussetzung (angewandt auf $m + \Delta(t^*)$) ergibt sich, dass $qt \in L(N, m + \Delta(t^*) + \Delta(t'))$. Da t^* bei m aktiviert ist, erhalten wir damit $t^*qt \in L(N, m + \Delta(t'))$. Wir wählen nun einfach $r = q$. Offenbar sind nach vorstehenden Überlegungen nun alle Bedingungen erfüllt.

Wenn t' in dem Wort q vorkommt, gibt es eine Zerlegung $q = ut'v$ mit $u \in (T \setminus \{t'\})^*$. Wir wählen nun $r = uv$. Dann gilt $|r| < |q|$. Es bleibt zu zeigen, dass $t'uvt \in L(N, m)$ gilt. Für $u = \lambda$ ist dies wegen $q = t'v$ trivial. Für die nichtleeren Wörter geben wir wieder einen Induktionsbeweis über die Länge, der analog zu dem Beweis im anderen Fall geführt wird. □

Satz 3.86 *Wenn das Petri-Netz N konfliktfrei und lebendig ist, dann ist jeder gerechte Ablauf auch unparteilich.*

Beweis. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies und lebendiges Petri-Netz und $w = (t_i)$ ein gerechter Ablauf in N.

Es sei t eine Transition von N. Aus Satz 3.84 erhalten wir, dass w fair ist. Wenn t bei unendlich vielen Markierungen m_i^w aktiviert ist, so kommt daher t unendlich oft mal in w vor.

Es sei T' die Menge aller Transitionen t, die nur bei endlich vielen m_i^w aktiviert sind. Dann gibt es ein j, so dass jedes $t' \in T'$ bei allen m_k^w mit $k \geq j$ nicht aktiviert ist. Für jedes $i \geq j$ sei l_i die Länge des kürzesten Wortes q_i, für das ein $t' \in T'$ mit $q_i t' \in L(N, m_i^w)$ existiert. Da das Netz lebendig ist, gibt es für jedes $t' \in T'$ Schaltfolgen q' mit $q't' \in L(N, m_i^w)$; folglich existiert für derartige Schaltfolge eine mit minimaler Länge, d.h. l_i existiert. Da aber kein $t' \in T'$ bei m_i^w aktiviert ist, muss $l_i > 0$ für $i \geq j$ gelten. Wir wählen nun k so, dass l_k minimal unter den l_i, $i \geq j$, ist. Es seien q ein Wort und $t \in T'$ eine Transition mit $|q| = l_k$ und $qt \in L(N, m_k^w)$. Offensichtlich ist $t \neq t_k$, da t bei m_k^w nicht aktiviert ist, aber t_k aktiviert ist. Es gilt also noch $t_k^- \leq m_k^w$. Wegen der Minimimalität von q hinsichtlich der Länge gilt sogar $q \in (T \setminus T')^*$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.85 erfüllt. Es gibt folglich ein r mit $t_k rt \in L(N, m_k^w)$ und $|r| \leq |q|$. Damit ergibt sich $rt \in L(N, m_{k+1}^w)$. Damit ist r eine bei der Bildung des Minimums zugelassene Schaltfolge. Wegen der Minimalität von q gilt daher $|r| = |q|$. Aus dem Beweis von Lemma 3.85 ergibt sich, dass t_k in q nicht vorkommt und $r = q$ gewählt werden kann (nur in diesem Fall gilt $|r| = |q|$). Wegen $q = r$ und $rt \in L(n, m_{k+1}^w)$ erhalten wir analog zu Obigem

$$t \neq t_{k+1},\ t_{k+1}^- \leq m_{k+1}^w,\ q \in (T \setminus T')^*,\ qt \in L(n, m_{k+1}^w),$$

womit wir wie oben nachweisen können, dass t_{k+1} nicht in q vorkommt.

Wir fahren so fort und erhallten, dass keine der Transitionen t_i mit $i \geq k$ in q vorkommt. Nach Definition von T' sind dies aber gerade alle Transitionen, die bei unendlich vielen m_i^w aktiviert sind. Da in q auch keine Transitionen aus T' vorkommen, ist q das leere Wort. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von q. Der Widerspruch kann nur dadurch aufgelöst werden, dass T' leer ist.

Also sind alle Transitionen unendlich oft aktiviert, und kommen in w unendlich oft vor. □

Wir geben nun einige Beziehungen zwischen Parteilichkeit und der Existenz von T-Invarianten.

Satz 3.87 *i) Wenn das Petri-Netz N eine realisierbare T-Invariante besitzt, deren Träger nicht alle Transitionen enthält, so gibt es in N einen parteilichen Ablauf.*

ii) Ist das Petri-Netz N beschränkt und gibt es einen parteilichen Ablauf in N, so hat N eine realisierbare T-Invariante, deren Träger nicht alle Transitionen enthält.

Beweis. i) Wenn x eine realisierbare T-Invariante von N ist, so gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ und eine Schaltfolge q für m mit $\pi(q)^T = x$ und $m\,[q > m$. Für ein beliebiges Wort p mit $m_0\,[p > m$ ist dann pq^ω ein Ablauf in N. Da der Träger von x nicht alle Transitionen enthält, kommen in q nicht alle Transitionen vor. Damit kommen nicht alle Transitionen in pq^ω unendlich oft vor, d.h. pq^ω ist ein parteilicher Ablauf.

ii) Wenn $w = (t_i)$ ein parteilicher Ablauf ist, so gibt es eine Transition t und ein $j \geq 1$ derart, dass $t \neq t_i$ für $i \geq j$ gilt. Da N überdies beschränkt ist, gibt es zwei Zahlen k_1 und k_2 derart, dass $k_1 < k_2$ gilt und die Markierungen $m^w_{k_1}$ und $m^w_{k_2}$ übereinstimmen. Wir setzen $q = t_{k_1+1}t_{k_1+2}\dots t_{k_2}$. Damit gilt $\Delta(q) = 0$ für die Schaltfolge q für $m^w_{k_1}$. Folglich ist $\pi(q)^T$ eine T-Invariante. Ferner kommt t in q nicht vor. Somit enthält der Träger von $\pi(q)^T$ nicht alle Transitionen. Der Vektor $\pi(q)^T$ erfüllt daher alle geforderten Eigenschaften. □

Folgerung 3.88 *i) Bei einem beschränkten Petri-Netz ist genau dann jeder Ablauf unparteilich, wenn jede realisierbare T-Invariante das Netz überdeckt.*

ii) In einem beschränkten Petri-Netz, bei dem jede minimale T-Invariante das Netz überdeckt, ist jeder Ablauf in N unparteilich.

Beweis. i) folgt aus Satz 3.87 sofort.

ii) Wenn die minimalen T-Invarianten das Netz überdecken, so überdecken alle T-Invarianten das Netz. Damit folgt ii) aus i). □

Wir haben bereits bei der einleitend betrachteten Folge in (3.4) festgestellt, dass einige Philosophen verhungern, obwohl sie unendlich oft essen, da ihre Denkphasen beliebig lang werden. Es ist also nicht nur von Interesse, wie oft eine Transition schaltet, sondern auch wie lang die Abschnitte werden können, in denen eine Transition nicht schaltet. Dies wird durch die Abweichung erfasst, die misst, wie oft eine Transition t schalten kann, bevor t' aktiviert ist.

Definition 3.89 *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, m eine Markierung von N und U und W zwei Teilmengen von T.*

i) Als Abweichung der Transitionsmenge U von W bei m in N *bezeichnen wir die Zahl*

$$Abw(m,U,W) = \sup\{\#_U(q) \mid \#_W(q) = 0 \textit{ und } q \in L(N,m^*) \textit{ für ein } m^* \in R(N,m)\}.$$

ii) Die Relation $BA[m]$ der beschränkten Abweichung bei m *wird als Menge aller Paare (U,W) definiert, für die $Abw(m,U,W)$ endlich ist.*

Falls es keine Schranke für die Länge derartiger q gibt, d.h. zu jeder Zahl k gibt es ein q_k mit den geforderten Eigenschaften und $|q| \geq k$, so ist das Supremum ω.

Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass q mit einer Transition aus U beginnt. Wäre dies nicht der Fall, d.h. $q = rtr'$ mit $\#_W(q) = 0$, $\#_U(r) = 0$, $t \in U$ und $q \in L(N,m^*)$ für ein erreichbare Markierung m^*. Es sei $m^*[r > m^*_1$. Dann gilt $\#_U(q) = \#_U(tr')$, $\#_W(tr') = 0$ und $tr' \in L(N,m^*_1)$, wobei m^*_1 eine erreichbare Markierung ist. Daher können wir anstelle von q auch tr' und erhalten den gleichen Wert für die Abweichung.

Falls $U = \{t\}$ und/oder $W = \{t'\}$, so schreiben wir anstelle von $abw(U,W)$ auch einfach $Abw(t,W)$ bzw. $Abw(U,t')$ bzw. $Abw(t,t')$

Beispiel 3.90 Wir betrachten das Netz N_{10} aus Abbildung 3.13 Wir geben in der folgenden Tabelle einige Werte für die Abweichung einer Transition t von einer anderen Transition t'. Zur Begründung des Wertes für $Abw(m_0,t,t')$ geben wir auch stets die Markierung $m*$ und die Folge q.

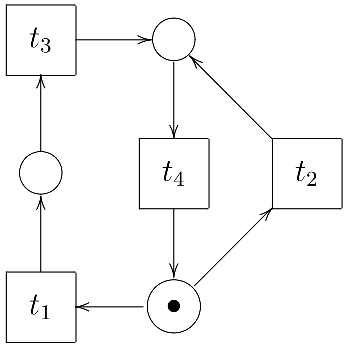

Abbildung 3.13: Petri-Netz N_{10}

t	t'	$Abw(m_0, t, t')$	$m*$	q
t_1	t_2	ω	m_0	$(t_1t_3t_4)^k$ für beliebiges k
t_2	t_1	ω	m_0	$(t_2t_4)^k$ für beliebiges k
t_1	t_3	1	m_0	t_1
t_3	t_1	1	$(0,0,1)$	$t_3(t_4t_2)^rt_4$ für alle r
t_3	t_4	1	$(0,0,1)$	t_3
t_4	t_3	ω	m_0	$(t_2t_4)^k$ für beliebiges k

Wir geben nur eine Begründung für die erste, die dritte und die vierte Zeile der Tabelle; die analogen Betrachtungen in den anderen Fällen bleiben dem Leser überlassen.

Das Wort $t_1t_3t_4$ ist eine Schaltfolge für m_0 und produziert wieder die Anfangsmarkierung. Daher ist $t_1t_3t_4)^k$ für jede positive natürliche Zahl k eine Schaltfolge für m_0. Da m_0 trivialerweise erreichbar ist und t_2 nicht in $(t_1t_3t_4)^k$ nicht vorkommt, ist jede Folge $(t_1t_3t_4)^k$ bei der Bildung des Supremums zugelassen. Damit ist die Anzahl des Vorkommens von t_1 in den zugelassenen Folge beliebig groß. Also gilt $Abw(m_0, t_1, t_2) = \omega$.

Nach jedem Schalten von t_1 muss als nächste Transition t_3 geschaltet werden. Folglich ist die maximale Anzahl des Schaltens von t_1 bevor t_3 geschaltet wird, genau 1.

Durch Schalten von t_1 erreichen wir die Markierung $(0,0,1)$, in der t_3 aktiviert ist. Nach dem Schalten von t_3 können wir nun beliebig oft die Folge t_4t_2 schalten, wodurch die Anzahl der Vorkommen von t_1 zwar Null bleibt, aber auch die Anzahl der Vorkommen von t_3 nicht erhöht wird. Die andere Möglichkeit ist t_4t_1 zu schalten. Daher kann bis zum erstmaligen Schalten von t_1 die Transition t_3 höchstens einmal schalten.

Wir geben nun ein paar einfache Relation für die Abweichungen von Transitionsmengen.

Folgerung 3.91 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, m eine Markierung von N und U und W zwei Teilmengen von T.*
i) Wenn $U \subseteq W$ ist, so gilt $Abw(m, U, W) = 0$.
ii) Wenn U eine bei m lebendige Transition enthält, ergibt sich $Abw(m, U, \emptyset) = \omega$.

Beweis. i) Wegen $U \subseteq W$ erfüllt jedes Wort q mit $\#_W(q) = 0$ auch $\#_U(q) = 0$.

ii) Die bei m lebendige Transition aus U kann in N beliebig oft geschaltet werden, d.h. dass es zu jeder Zahl k eine Schaltfolge q gibt, in der t öfter als k-mal vorkommt. Damit gilt $\#_U(q) \geq k$. Andererseits ist natürlich $\#_\emptyset(q) = 0$. Damit wird $Abw(m, U, \emptyset)$ beliebig groß, d.h. $Abw(m, U, \emptyset) = \omega$. $\square$

Satz 3.92 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, m eine Markierung von N und U, W, U_1, U_2, W_1 und W_2 Teilmengen von T.*
i) Wenn $U_1 \subseteq U_2$ gilt, so ist $Abw(m, U_1, W) \leq Abw(m, U_2, W)$.
ii) Wenn $W_1 \subseteq W_2$ gilt, so ist $Abw(m, U, W_1) \geq Abw(m, U, W_2)$,
iii) Es gilt $Abw(m, U_1 \cup U_2, W) \leq Abw(m, U_1, W) + Abw(m, U_2, W)$.

Beweis. i) Die Aussage folgt sofort aus $\#_{U_1}(q) \leq \#_{U_2}(q)$ für alle Wörter q über T.

ii) Da $\#_{W_2}(q) = 0$ die Beziehung $\#_{W_1}(q) = 0$ impliziert, sind bei $Abw(m, U, W_2)$ weniger Wörter bei der Bildung des Supremums zugelassen als bei $Abw(m, U, W_1)$. Damit folgt die behauptete Relation.

iii) Die Behauptung folgt sofort aus $\#_{U_1 \cup U_2}(q) \leq \#_{U_1}(q) + \#_{U_2}(q)$ (Buchstaben aus dem Durchschnitt werden auf der linken Seite nur einmal, auf der rechten Seite zweimal gezählt). $\square$

Für disjunkte Mengen U_1 und U_2 gilt zwar $\#_{U_1 \cup U_2}(q) = \#_{U_1}(q) + \#_{U_1}(q)$, aber in Satz 3.92 iii) kann auch in diesem Fall das (echte) Kleinerzeichen stehen. Im Netz N_{10} aus Abbildung 3.13 gilt z.B.

$$Abw(m_0, t_1, t_4) = Abw(m_0, t_2, t_4) = Abw(m_0, \{t_1, t_2\}, t_4) = 1,$$

wie man leicht erkennt.

Satz 3.93 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ eine gewöhnliche Zustandsmaschine, die bei m_0 genau eine Marke trägt, m eine Markierung von N und t_1 und t_2 zwei Transitionen aus T. Dann gilt $Abw(m, t_1, t_2) \in \{0, 1, \omega\}$.*

Beweis. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ eine gewöhnlich Zustandmaschine, m eine Markierung von N und t_1 und t_2 zwei Transitionen aus T, für die $Abw(m, t_1, t_2) \geq 2$ gilt. Dann gibt es Wort q mit

$$\#_{t_1}(q) \geq 2, \ \#_{t_2}(q) = 0 \text{ und } q \in L(N, m') \text{ für ein } m' \in R(N, m).$$

Offenbar muss q eine Zerlegung $q = rt_1q't_1q''$ haben. Da in einer Zustandsmaschine jede Transition nur eine Stelle im Vor- bzw. Nachbereich hat und die Zustandsmaschine gewöhnlich ist, wird bei jedem Schalten einer Transition immer nur eine Marke vom Vorbereich auf den Nachbereich verschoben. Daher gilt mit $m' \, [r > m''$ die Beziehung $m'' \, [t_1 q' > m''$. Somit ist jedes Anfangsstück von $r(t_1q')^\omega$ eine bei der Bildung des Supremums zugelassene Schaltfolge. Folglich gilt $Abw(m, t_1, t_2) = \omega$.

Damit sind $0, 1$ und ω die einzigen möglichen Werte für $Abw(m, t_1, t_2)$ für Transitionen t_1 und t_2 einer gewöhnliche Zustandsmaschine, deren Anfangsmarkierung genau eine Marke trägt. Offensichtlich gelten für das Netz N_{11} aus Abbildung 3.14 die Beziehungen

$$Abw(m_0, t_1, t_3) = 0, \ Abw(m_0, t_3, t_4) = 1 \text{ und } Abw(m_0, t_4, t_1) = \omega$$

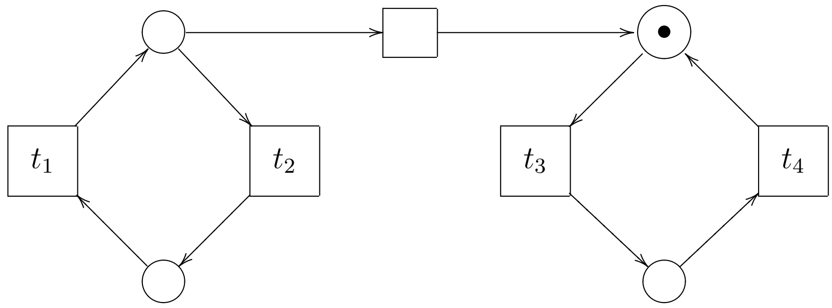

Abbildung 3.14: Netz N_{11}

(t_1 kann in N_{11} bei keiner erreichbaren Markierung geschaltet werden; auf jedes Schalten von t_3 folgt ein Schalten von t_4 und $(t_3t_4)^k$ ist für jedes k eine Schaltfolge für m_0). Hiermit sind die drei möglichen Werte auch realisierbar. □

Wir geben nun einen Zusammenhang zwischen der Abweichung und der Unparteilichkeit.

Satz 3.94 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und m eine Markierung von N. Wenn jedes Paar (t, t') von Transitionen in $BA[m_0]$ liegt, so ist jeder Ablauf in N unparteilich.*

Beweis. Angenommen, es gibt einen parteilichen Ablauf $w = (t_i)$. Dann gibt es eine Transition $t \in T$, die in w nur endlich oft vorkommt. Dann gibt es eine natürliche Zahl j derart, dass für alle $i \geq j$ die Beziehung $t_i \neq t$ gilt. Wir setzen $U = T \setminus \{t\}$ und $q_k = t_{j+1} \dots t_k$ für $k > j$. Dann ergeben sich folgende Relationen

$$|q_k| = \#_U(q_k) = k - j + 1,\ q_k \in L(N, m_j^w),\ \#_t(q_k) = 0.$$

Hieraus folgt $Abw(m_0, U, t) = \omega$, da k beliebig groß gewählt werden kann. Da U die Vereinigung von endlich Einermengen ist, die jeweils aus genau einer Transition bestehen, folgt aus Satz 3.92 iii), dass für ein t' in U auch $Abw(m_0, t', t) = \omega$ gilt. □

Die Umkehrung von Satz 3.94 gilt im Allgemeinen nicht. Dazu betrachten wir das Netz N_{12}, das in Abbildung 3.15 gegeben ist. Wenn k die Anzahl der Marken auf p_1 ist, so

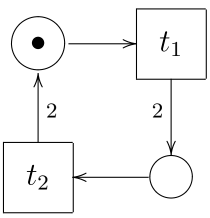

Abbildung 3.15: Petri-Netz N_{12}

kann höchstens k-mal t_1 geschaltet werden, und dann muss wieder t_2 geschaltet werden. Analoges gilt für t_2 bezüglich der Marken auf p_2. Daher gibt es in jedem Ablauf $w = (t'_i)$ zu jeder Zahl k Zahlen $i_1 \geq k$ und $i_2 \geq k$ mit $t'_{i_1} = t_1$ bzw. $t'_{i_2} = t_2$. Daher enthält jeder Ablauf unendlich viele Vorkommen von t_1 und t_2, d.h. jeder Ablauf ist unparteilich. Andererseits gilt $Abw(m_0, t_1, t_2) = \omega$, da auf p_1 eine beliebige Anzahl k von Marken gebracht werden kann und dann t_1 auch k-mal hintereinander schalten kann.

Satz 3.95 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein beschränktes Petri-Netz und m eine Markierung von N. Wenn jeder Ablauf in N unparteilich ist, so liegt jedes Paar (t, t') von Transitionen in $BA[m_0]$.*

Beweis. Da N beschränkt ist, ist $R(N, m_0)$ eine endliche Menge, die aus K Markierungen bestehen möge.

Angenommen, es gibt Transitionen t und t' für die $Abw(m_0, t, t') = \omega$ gilt. Dann gibt es zu jeder Zahl k eine erreichbare Markierung $m_k \in R(N, m_0)$ und ein Wort $q_k \in L(N, m_k)$, in dem t mindestens k-mal und t' nicht vorkommt. Wir wählen nun $k > K$. Dann gibt es eine Markierung m', die beim Schalten von q_k mindestens zweimal erreicht wird und daher Wörter q, q', q'' und p derart, dass

$$q_k = qq'q'' \text{ und } m_0 [p > m_k [q > m' [q' > m'$$

gelten. Somit ist $w = pq(q')^\omega$ ein Ablauf in N, der aber nicht parteilich ist, da wegen $0 = \#_{t'}(q_k) \geq \#_{t'}(q') \geq 0$ die Transition t' in w nur endlich oft vorkommt. Damit haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme erhalten. □

Die Relation $BA[m_0]$ steht nach den beiden letzten Aussagen in engem Zusammenhang mit der Unparteilichkeit. Es ist daher von Interesse ein Verfahren zur Bestimmung von $BA[m_0]$ zu haben.

Es sei G der Überdeckungsgraph des beschränkten Petri-Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$. G habe die elementaren Kreise $k_1, k_2, \dots k_r$ (dabei heißt ein Kreis k elementar, wenn kein Teilweg von k ein Kreis ist). Für $1 \leq i \leq r$ sei q_i die Schaltfolge, die dem Kreis k_i entspricht. Wir definieren dann für eine Teilmenge $U \subseteq T$ der Transitionen den Vektor

$$d(U) = (\#_U(q_1), \#_U(q_2), \dots, \#_U(q_r))$$

und dessen Träger $supp(d(U))$ als die Menge der i mit $\#_U(q_i) > 0$.

Satz 3.96 *Es sei $N = (S, T, F.V, m_0)$ ein Petri-Netz mit dem Überdeckungsgraphen G.*

i) Falls G keinen Kreis enthält, so gilt $(U, W) \in BA[m_0]$ für beliebige $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$.

ii) Wenn G die elementaren Kreise $k_1, k_2, \dots k_r$ enthält, so gilt $(U, W) \in BA[m_0]$ genau dann, wenn $supp(d(U)) = supp(d(W))$ gilt. □

Wir verzichten hier auf einen Beweis, da dafür Kenntnisse über den Überdeckungsgraphen erforderlich sind, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht bereitstehen.

Satz 3.97 *Für zwei gegebene Mengen $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$ von Transitionen eines Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist es entscheidbar, ob $(U, W) \in BA[m_0]$ gilt.*

Beweis. Wir berechnen zuerst den Überdeckungsgraphen HG von N. Als nächstes bestimmen wir die elementaren Kreise von G (dies kann mittels der Breitensuche ähnlichen Verfahren geschehen). Falls keine Kreise vorhanden sind, so gilt $(U,W) \in BA[m_0]$. Im anderen Fall berechnen wir $supp(d(U)$ und $supp(d(W)$. Stimmen diese beiden Mengen überein, so haben wir wegen Satz 3.96 $(U,W) \in BA[m_0]$; anderenfalls gilt $(U,W) \notin BA[m_0]$. □

Wir haben oben gesehen, dass die Abweichung kein Abstand sein kann, da sie nicht symmetrisch ist. Wir wollen nun eine Modifikation vornehmen, die einen Abstand liefert. Dabei werden wir auch noch eine Gewichtung der Transitionen vornehmen.

Definition 3.98 *Es sei $N = (S,T,F.V.m_0)$ ein Petri-Netz, $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$ zwei Mengen von Transitionen und χ eine Abbildung von T in die Menge* **N** *der positiven natürlichen Zahlen.*

i) Wir definieren den Spaltenvektor $\chi_{U,W}$ über den Transitionen durch

$$\chi_{U,W}(t) = \begin{cases} \chi(t) & \text{falls } t \in U \text{ und } t \notin W, \\ \chi(t) & \text{falls } t \notin U \text{ und } t \in W, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

ii) Die Synchronieabweichung der Transitionsmenge U von der Transitionsmenge W bezüglich χ *ist die Zahl*

$$SA(\chi, U, W) = \sup\{\pi(q) \cdot \chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0)\},$$

und der Synchronieabstand von U und W bezüglich χ *ist die Zahl*

$$D(\chi, U, W) = \max\{SA(\chi, U, W), SA(\chi, W, U)\}.$$

Beispiel 3.99 Wir betrachten das Netz N_{13} aus Abbildung 3.15. Es ist leicht zu sehen,

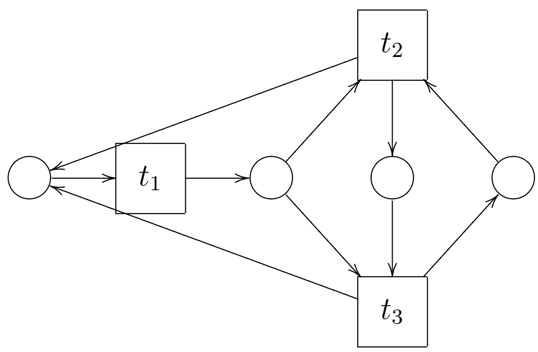

Abbildung 3.16: Petri-Netz N_{13}

dass alle Schaltfolgen Anfangsstücke des unendlichen Wortes $(t_1t_2t_1t_3)^\omega$ sind.

Wenn wir den Vektor $\chi = (1,1,1)$ wählen, so erhalten wir $SA(\chi, t_1, t_2) = \omega$, da für ein beliebiges k das Wort $q = (t_1t_2t_1t_3)^k$ den Wert $\pi(q)\chi_{t_1,t_2} = 2k - k = k$ liefert, womit das Supremum bei ω liegt. Dagegen ist $SA(\chi, t_2, t_1) = 1$, denn bei jedem Wort aus mindestens zwei Buchstaben ist die Anzahl der t_1 mindestens so groß wie die Anzahl der t_2, während $t_2 \in L(N,m)$ mit $m_0\,[t_1 > m$ den Wert 1 liefert. Folglich gilt auch $D(\chi, t_1, t_2) = D(\chi(t_2, t_1) = \omega$.

Wählen wir dagegen $\chi = (1,2,2)$, so ergibt sich $SA(\chi, t, t') = 2$ und damit auch $D(\chi, t, t') = 2$ für beliebige verschiedene Transitionen t und t' aus T.

Wir stellen nun eine Beziehung zwischen der Abweichung *Abw* und der Synchronieabweichung SA her. Diese ergibt sich aus den folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned}
SA(\chi,U,W) &= \sup\{\pi(q)\cdot\chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0)\}\\
&\geq \sup\{\pi(q)\cdot\chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q)=0\}\\
&= \sup\{\sum_{t\in U\setminus W} \#_t(q)\chi_{U,W}(t) \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q)=0\}\\
&\geq \sup\{\#_{U\setminus W}(q) \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q)=0\}\\
&= \mathit{Abw}(m_0, U\setminus W, W)
\end{aligned}$$

Wir geben zuerst einige elementare Eigenschaften von D an.

Folgerung 3.100 *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, U und W Mengen von Transitionen und χ eine Funktion von T in $\mathbf{N}$.*

i) Es gilt $D(\chi,U,W) \geq SA(\chi,U,W) \geq 0$.

ii) Wenn $U \subseteq W$ gilt, dann ist $SA(\chi,U,W) = 0$.

Beweis. i) Für das leere Wort λ haben wir $\pi(\lambda)\cdot\chi_{U,W} = 0$. Damit muss das Supremum mindestens 0 sein.

ii) Entsprechend der Definition hat $\chi_{U,W}$ unter der Voraussetzung $U \subseteq W$ bei allen $s \in W \setminus U$ einen negativen Wert und sonst nur Nullen. Damit gilt für jedes Wort q die Beziehung $\pi(q)\chi_{U,W} \leq 0$. Unter Beachtung von i) folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt, dass die Bezeichnung Synchronisationsabstand für $D(\chi,U,W)$ berechtigt ist.

Satz 3.101 *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, U und W Mengen von Transitionen und χ eine Funktion von T in $\mathbf{N}$. Wenn in N keine Transition tot ist, so ist D bez. χ ein Abstand in der Potenzmenge von T.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

$$D(\chi,U,W) = 0 \text{ gilt genau dann, wenn } U = W \text{ ist.} \tag{3.5}$$

$$D(\chi,U,W) = D(\chi,W,U) \text{ gilt für alle } U,W \subseteq T. \tag{3.6}$$

$$D(\chi,U,W) \leq D(\chi,U,Y) + D(\chi,Y,W) \text{ gilt für alle } U,W,Y \subseteq T. \tag{3.7}$$

Wir zeigen (3.5). Wenn $U = W$ gilt, so folgt aus Folgerung 3.100 ii) sofort

$$SA(\chi,U,W) = SA(\chi,W,U) = 0.$$

Somit ist auch $D(\chi,U,W) = 0$.

Ist umgekehrt $D(\chi, U, W) = 0$, so ergibt sich aus der Definition von D und Folgerung 3.100 i) $SA(\chi, U, W) = SA(\chi, W, U) = 0$. Daher gilt für alle Markierungen $m \in R(N, m_0)$ und alle Wörter $q \in L(N, m)$

$$\pi(q)\chi_{U,W} \leq 0 \quad \text{und} \quad \pi(q)\chi_{W,U} \leq 0. \tag{3.8}$$

Nun folgt aber aus der Definition von $\chi_{U,W}$ sofort $\chi_{U,W} = -\chi_{W,U}$. Falls also $\pi(q)\chi_{U,W} < 0$ für ein q wäre, so wäre $\pi(q)\chi_{W,U} = -\pi(q)\chi_{U,W} > 0$ im Widerspruch zu (3.8). Damit haben wir $\pi(q)\chi_{U,W} = 0$. Analog zeigen wir $\pi(q)\chi_{W,U} = 0$.

Die Aussage (3.6) folgt sofort aus der Symmetrie in der Definition von $D(\chi, U, W)$.

Die Aussage (3.7) ist offenbar, wenn $D(\chi, U, Y) = \omega$ oder $D(\chi, Y, W) = \omega$ gilt. Wir können daher im Folgenden annehmen, dass $SA(\chi, U, Y)$ und $SA(\chi, Y, W)$ endlich sind. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass U, W und Y paarweise disjunkt sind, da den Transitionen im Durchschnitt von A und B bei $\chi_{A,B}$ der Wert 0 zugewiesen wird.

Es sei L die Vereinigung aller Mengen $L(N, m)$ mit $m \in R(N, m_0)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
SA(\chi, U, W) &= \sup\{\pi(q)\chi_{U,W} \mid q \in L\} \\
&= \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&= \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) \\
&\qquad + \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&\leq \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&\qquad + \sup\{\sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&= SA(\chi, U, Y) + SA(\chi, Y, W)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D(\chi, U, W) &= \sup\{SA(\chi, U, W),\ SA(\chi, W, U)\} \\
&\leq \sup\{SA(\chi, U, Y) + SA(\chi, Y, W),\ SA(\chi, W, Y) + SA(\chi, Y, U)\} \\
&\leq \sup\{SA(\chi, U, Y), SA(\chi, Y, U)\} + \sup\{SA(\chi, W, Y), SA(\chi, Y, W)\} \\
&= D(\chi, U, Y) + D(\chi, Y, W).
\end{aligned}$$

Folglich ist (3.7) auch bewiesen. □

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen $D(\chi, U, W)$ endlich ist. Insbesondere fragen wir nach der Entscheidbarkeit dieser Eigenschaft. Wir beginnen mit ein paar einfachen Folgerungen aus $D(\chi, U, W)$.

Satz 3.102 *Wenn x eine realisierbare T-Invariante eines Petri-Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$, χ eine Funktion von T in $\mathbf{N}$ ist und $SA(\chi, U, W) \neq \omega$ für zwei Mengen U und W von Transitionen gilt, so ist $\chi_{U,W}^T \cdot x \leq 0$.*

Beweis. Wenn x eine realisierbare T-Invariante ist, so gibt es im Erreichbarkeitsgraphen von N einen Kreis derart, dass x der transponierte Parikhvektor der zum Kreis gehörenden Schaltfolge q ist. Damit haben wir $m_0\,[p > m\,[q > m$ für eine Schaltfolge p und eine Markierung m. Da q einen Kreis beschreibt, ist q^n für jedes n in $L(N,m)$. Damit ist wegen $\pi(q)^T = x$

$$SA(\chi, U, W) \geq \pi(q^n)\chi_{U,W} = n\pi(q)\chi_{U,W} = n(\pi(q)\chi_{U,W})^T = n\chi_{U,W}^T\pi(q)^T = n\chi_{U,W}^T x.$$

Da für $\chi_{U,W}^T x > 0$ der Wert $SA(\chi,U,W)$ größer als jede gegebene Zahl n ist, erhalten wir $SA(\chi,U,W) = \omega$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit haben wir $\chi_{U,W}^T x \leq 0$.
□

Folgerung 3.103 *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, x eine realisierbare T-Invariante von N und χ eine Funktion von T in $\mathbf{N}$, und es gelte $D(\chi,U,W) \neq \omega$ für zwei Mengen U und W von Transitionen. Dann ist $\chi_{U,W}^T \cdot x = 0$.*

Beweis. Nach Definition gilt $\chi_{U,W} = -\chi_{W,U}$. Aus der Voraussetzung $D(\chi,U,W) \neq \omega$ folgen $SA(\chi,U,W) \neq \omega$ und $SA(\chi,W,U) \neq \omega$. Damit erhalten wir aus Satz 3.102

$$0 \geq \chi_{W,U}^T \cdot x = -\chi_{U,W}^T \cdot x \geq 0,$$

woraus die Behauptung sofort folgt. □

Satz 3.104 *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein beschränktes Petri-Netz, U und W Teilmengen von T und χ eine Funktion von T in $\mathbf{N}$. Dann ist $D(\chi,U,W)$ genau dann endlich, wenn $\pi(r)\cdot\chi_{U,W} = 0$ für alle Wörter $r \in T^*$ gilt, die einen elementaren Kreise im Erreichbarkeitsgraphen von N beschreiben.*

Beweis. Es sei zuerst $D(\chi,U,W)$ ein endlicher Wert. Da jeder Vektor $\pi(r)^T$ eine realisierbare T-Invariante ist, erhalten wir $\chi_{U,W}^T\pi(r)^T = 0$ aus Folgerung 3.103. Somit gilt $\pi(r)\chi_{U,W} = 0$.

Es seien K die Anzahl der Markierungen in $R(N,m_0)$ und $r_1, r_2, \ldots r_k$ die Parikh-Vektoren der Schaltfolgen zu elementaren Kreisen in $EG(N,m_0)$. Wir zeigen zuerst, dass

(*) zu jeder Markierung $m \in R(N,m_0)$ und jedem Wort $q \in L(N,m)$ eine Funktion r_q von T in $\mathbf{N}$ (geschrieben als Zeilenvektor r_q) und Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ so existieren, dass
$\pi(q) = r_q + \sum_{i=1}^k \alpha_i r_i$ und $0 \leq r_q(t) < K$ für $t \in T$ gelten.

Es sei $q = t_1t_2\ldots t_n \in L(N,m)$. Dann gilt

$$m_0\,[* > m = m_0'\,[t_1 > m_1'\,[t_2 > m_2'\,[t_3 > \ldots\,[t_n > m_n'.$$

Es sei zuerst $n < K$ gilt, so gilt $\#_t(q) \leq |q| = n < K$ für jede Transition $t \in T$. Wir wählen nun $r_q = \pi(q)$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Damit ergeben sich

$$0 \leq \#_t(q) = r_q(t) < K \text{ für } t \in T \quad \text{und} \quad \pi(q) = r_q = r_q + \sum_{i=1}^k \alpha_i r_i,$$

womit die Aussage bewiesen ist.

Es sei nun $n \geq K$. Dann gilt sogar $n+1 > K$ und folglich sind zwei der $n+1$ Markierungen $m'_0, m'_1, \ldots, m'_n$ identisch, sagen wir $m'_i = m'_j$ mit $i < j$. Damit ergeben sich

$$m_0\,[* > m'_0\,[t_1t_2\ldots t_i > m'_i\,[t_{i+1}t_{i+2}\ldots t_j > m'_j\,[t_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n > m'_n,$$

$t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n$ ist Schaltfolge für $m = m'_0$ und $t_{i+1}t_{i+2}\ldots t_j$ beschreibt einen Kreis u in $EG(N, m_0)$. Als Kreis ist u aus elementaren Kreisen zusammengesetzt. Daher haben

$$\pi(t_{i+1}t_{i+2}\ldots t_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i.$$

Ist die Länge des verbleibenden Wort $t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n \in L(N,m)$ kleiner als K, wählen wir wie oben $r_q = \pi(t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n)$ und erhalten

$$\pi(q) = \pi(t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n) + \pi(t_{i+1}t_{i+2}\ldots t_j) = r_q + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i$$

und wie oben $0 \leq r_q(t) < K$ für $t \in T$. Ist die Länge von $t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n$ größer als K, so können wir die gleiche Prozedur, die oben auf q angewendet wurde, auf die Sequenz $t_1t_2\ldots t_it_{j+1}t_{j+2}\ldots t_n$ anwenden und iteriert so weiter verfahren, bis sich ein Restwort mit einer Länge $< K$ ergibt.

Es seien nun χ, U, W so gegeben, dass $\pi(r)\cdot\chi_{U,W} = 0$ für alle Wörter $r \in T^*$ gilt, die einen elementaren Kreise im Erreichbarkeitsgraphen von N beschreiben. Dann gilt unter Berücksichtigung von (*) und Folgerung 3.103 (man beachte, dass die r_i^T T-Invarianten sind)

$$\pi(q)\chi_{U,W} = r_q\chi_{U,W} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i \chi_{U,W} = r_q\chi_{U,W} \leq \sum_{t\in U} r_q(t)\chi(t) < \sum_{t\in U} \chi(t)\cdot K = K'.$$

Daher ist das Supremum bei der Definition von $SA(\chi, U, W)$ durch K' nach oben beschränkt. Analog weist man auch eine Schranke für $SA(\chi, W, U)$ nach, womit $D(\chi, U, W)$ beschränkt ist. □

Folgerung 3.105 *Für ein beschränktes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$, Teilmengen U und W von T und eine Funktion $\chi : T \to \mathbf{N}$ ist es entscheidbar, ob der Abstand $D(\chi, U, W)$ endlich ist.*

Beweis. Da der Erreichbarkeitsgraph eines beschränkten Netzes endlich ist, können wir den Erreichbarkeitsgraphen konstruieren und dann mittels Breitensuchen alle elementaren Kreise darin finden. Für alle diese Kreise r können wir überprüfen, ob $\pi(r)\cdot\chi_{U,W} = 0$ gilt. Im positiven Fall ist $D(\chi, U, W)$ endlich; anderenfalls ist $D(\chi, U, W) = \omega$. □

3.7 Deadlocks und Fallen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Mengen von Stellen, für die eine Inklusionsbeziehung zwischen Vor- und Nachbereich besteht. Die zwei möglichen Inklusionen führen zu zwei Konzepten.

Definition 3.106 *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und D eine Teilmenge von S.*
i) Wir sagen, dass D ein Deadlock von N ist, wenn $\bullet D \subseteq D\bullet$ gilt.
ii) Wir sagen, dass D eine Falle von N ist, wenn $D\bullet \subseteq \bullet D$ gilt.

Wir lassen den Zusatz „von N“ weg, wenn N durch den Zusammenhang eindeutig festgelegt ist.

Anschaulich bedeutet dies im Fall des Deadlocks, dass eine Transition, die Marken in D hinein gibt, auch Marken aus D entnimmt. Wenn man das Inklusionzeichen sogar so deutet, dass mehr aus D entnommen wird, als hineingegeben wird, so werden aus einem Deadlock stets Marken entnommen und daher tritt die Situation, dass die Transitionen des Nachbereichs nicht mehr geschaltet werden können. Daher rührt der Name Deadlock. Wir stellen aber fest, dass es kein wirklicher Deadlock ist, da andere Transitionen noch geschaltet werden können. Daher wird anstelle von Deadlock auch der Begriff Tube verwendet. Wir sprechen von Deadlocks, weil dieser Begriff gebräuchlicher scheint (z.B. in der für die Vorlesung verwendeten Literatur).

Für eine Falle bedeutet es, dass das Entnehmen von Marken aus D von einem Hineingeben von Marken in D gekoppelt ist. Bei der Interpretation, dass mehr hinein gegeben wird, als entnommen wird, so werden Marken in D wie in einer Falle gefangen.

Beispiel 3.107 Wir betrachten das Netz N_{14} aus der Abbildung 3.17.

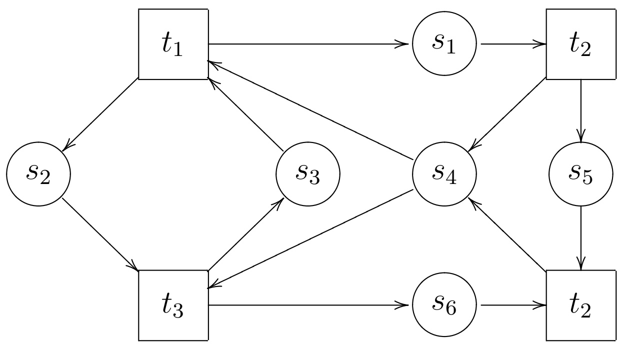

Abbildung 3.17: Netz N_{14}

Dann gelten für

$$D_1 = \{s_1, s_4, s_5\},\ D_2 = \{s_2, s_3, s_4, s_5\} \text{ und } D_3 = \{s_1, s_4, s_6\}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bullet D_1 &= \{t_1, t_2, t_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = D_1\bullet, \\ D_2\bullet &= \{t_1, t_3, t_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet D_2, \\ D_3\bullet &= \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet D_3. \end{aligned}$$

Somit ist D_1 ein Deadlock, aber keine Falle; D_2 ist eine Falle, aber keine Deadlock und D_3 ist sowohl Falle als auch Deadlock.

Wir bemerken, dass eine Menge D von Stellen genau dann sowohl Deadlock als auch Falle ist, wenn $\bullet D = D\bullet$ ist, d.h. wenn Vorbereich und Nachbereich von D identisch sind.

Da $\bullet\emptyset = \emptyset\bullet = \emptyset$ gilt, ist die leere Menge sowohl Deadlock als auch Falle.

Satz 3.108 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und y eine echte S-Invariante von N. Dann ist die Menge D aller Stellen, für die $y(s) \neq 0$ ist, sowohl Deadlock als auch Falle von N.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine Transition $t \in D\bullet \setminus \bullet D$, d.h. D ist keine Falle. Dann gilt $\Delta t(s) \leq 0$ für alle $s \in D$ und es gibt ein $s_1 \in D$ mit $\Delta t(s_1) < 0$. Damit ergibt sich

$$\Delta t \cdot y = \sum_{s \in D} \Delta t(s) \cdot y(s) \leq \sum_{s \in D} \Delta t(s) < 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Eigenschaft einer S-Invarianten.

Analog zeigt man, dass es auch kein t in $\bullet D \setminus D\bullet$ gibt. Somit gilt $\bullet D = D\bullet$. □

Wir geben nun ein paar elementare Eigenschaften von Deadlocks und Fallen an.

Satz 3.109 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein gewöhnliches Petri-Netz, m eine Markierung von N und $D \subseteq S$ eine Menge von Stellen.*

i) Wenn D ein Deadlock ist und bei m keine Marke trägt, so ist D auch bei allen Markierungen $m' \in R(N, m)$ ohne Marken.

ii) Wenn D eine Falle ist und bei m mindestens eine Marke trägt, so trägt D auch bei allen Markierungen $m' \in R(N, m)$ mindestens eine Marke.

Beweis. Wir geben den Beweis jeweils nur für den Fall, dass $m\,[t > m'$ für eine Transition t gilt. Die Übertragung auf den allgemeinen Fall $m\,[t_1 t_2 \ldots t_n > m'$ für eine Schaltfolge $t_1 t_2 \ldots t_n$ kann dann einfach durch Induktion über die Länge der Folge erbracht werden.

i) Wir nehmen an, dass D eine Marke bei m' trägt. Da D bei m keine Marke trägt, wird durch t eine Marke auf eine Stelle von D geschaltet. Damit gilt $t \in \bullet D$. Aus der Deadlock-Definition folgt nun $t \in D\bullet$. Daher wird beim Schalten von t einigen Plätzen von D eine Marke entnommen. Dies ist aber unmöglich, da D bei m keine Marke trägt. Folglich muss unsere obere Annahme falsch sein, womit nachgewiesen ist, dass D auch bei m' keine Marke trägt.

ii) Wir nehmen jetzt an, dass D bei m' keine Marke trägt. Dann muss t die bei m auf D vorhandenen Marken entfernen. Also gilt $t \in D\bullet$. Nach Definition der Falle ist dann auch $t \in \bullet D$. Somit wird durch t auf D auch mindestens eine Marke geschaltet. Folglich hat D bei m' mindestens eine Marke im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Satz 3.110 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein gewöhnliches Petri-Netz und $D, D_1, D_2 \subseteq S$ Mengen von Stellen.*

i) Wenn D_1 und D_2 Deadlocks von N sind, so ist auch $D_1 \cup D_2$ ein Deadlock.

ii) Wenn D_1 und D_2 Fallen von N sind, so ist auch $D_1 \cup D_2$ eine Falle.

iii) Zu jeder Menge D von Stellen, gibt es genau einen (bez. der Inklusion) maximalen Deadlock und genau eine maximale Falle, die in D enthalten sind.

Beweis. i) Nach Definition des Deadlocks gelten

$$\bullet D_1 \subseteq D_1 \bullet \quad \text{und} \quad \bullet D_2 \subseteq D_2 \bullet$$

und damit

$$\bullet(D_1 \cup D_2) = \bullet D_1 \cup \bullet D_2 \subseteq D_1 \bullet \cup D_2 \bullet = (D_1 \cup D_2) \bullet .$$

Somit ist $D_1 \cup D_2$ ein Deadlock.

ii) kann völlig analog bewiesen werden.

iii) Angenommen, es gibt zwei verschiedene bez. der Inklusion maximale Deadlocks D_1 und D_2 von D. Wegen $D_1 \subseteq D$ und $D_2 \subseteq D$ haben wir auch $D_1 \cup D_2 \subseteq D$. Außerdem ist wegen $D_1 \neq D_2$ die Menge $D_1 \cup D_2$ eine echte Obermenge von D_1. Nach Teil i) ist $D_1 \cup D_2$ ein Deadlock. Dies widerspricht aber nun der Maximalität von D_1. Folglich kann es keine zwei verschiedenen maximalen Deadlocks in D geben.

Die Aussage für Fallen kann genauso bewiesen werden. □

Definition 3.111 *Ein Deadlock D des Petri-Netzes N heißt minimal, wenn D nicht die leere Menge ist und jeder nichtleere Deadlock von N keine echte Teilmenge von D ist.*

Die Definition besagt, dass für einen minimalen Deadlock D kein nichtleerer Deadlock D' mit $D' \subset D$ existiert.

Wir geben nun einige einfache Eigenschaften minimaler Deadlocks.

Satz 3.112 *In einem minimalen Deadlock gibt es keine Stelle mit leerem Nachbereich.*

Beweis. Angenommen, für die Stelle s des minimalen Deadlocks D gilt $s\bullet = \emptyset$. Dann gibt es eine Transition $t \in \bullet s$, da s sonst ein isolierter Knoten wäre. Wegen $t \in \bullet s \subseteq \bullet D$ und der Definition des Deadlocks haben wir $t \in s'\bullet$ für eine Stelle $s' \in D$. Offenbar ist $s \neq s'$.

Wir betrachten nun die Menge $D' = D \setminus \{s\}$. Dann ergibt sich

$$\bullet D' \subseteq \bullet D \subseteq D\bullet = D'\bullet,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $s\bullet = \emptyset$ aus

$$D\bullet = (D' \cup \{s\})\bullet = D' \bullet \cup s\bullet = D'\bullet$$

folgt. Damit ist D' ein Deadlock. Außerdem ist wegen $s' \in D'$ der Deadlock D' nicht leer, und nach Definition ist D' eine echte Teilmenge von D. Dies widerspricht aber der vorausgesetzten Minimimalität von D. □

Satz 3.113 *Jeder minimale Deadlock ist stark zusammenhängend (d.h. von jeder Stelle $s \in D$ gibt es zu jeder Stelle $s' \in D$ einen gerichteten Weg).*

Beweis. Angenommen, es gibt einen minimalen Deadlock D, der nicht stark zusammenhängend ist. Dann gibt es zwei Stellen s_1 und s_0 derart, dass es keinen gerichteten Weg von s_1 nach s_0 gibt. Wir setzen

$$D' = \{s \mid s \in D \text{ und es gibt einen gerichteten Weg von } s \text{ nach } s_0\}.$$

Dann gelten

$$s_0 \in D' \quad \text{und} \quad s_1 \notin D' .$$

Damit ist D' eine nichtleere echte Teilmenge von D.

Es sei nun $t \in \bullet D'$. Dann gibt es einen Weg von $t \to p \to \ldots \to s_0$ von t nach s_0, wobei $p \in D'$ gilt. Wegen $t \in \bullet p \subseteq \bullet D' \subseteq \bullet D$ und der Definition des Deadlocks (angewandt auf D) erhalten wir $t \in D\bullet$. Folglich gibt es eine Stelle s' in D mit $s' \in \bullet t$. Damit gibt es einen Weg $s' \to t \to \ldots \to s_0$. Nach Definition haben wir $s' \in D'$ und damit $t \in D'\bullet$. Somit ist D' ein Deadlock. Daher ergibt sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von D. □

Satz 3.114 *Wenn es keinen Deadlock in einem Petri-Netz N gibt, so ist N lebendig.*

Beweis. Angenommen, das Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist nicht lebendig. Dann gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ und eine Transition $t \in T$, die bei m tot ist. Es sei D die Menge aller Stellen $s \in S$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:
– es gibt einen gerichteten Weg von s nach t,
– s ist beschränkt bei allen $m' \in R(N, m)$, (d.h. $m'(s) \leq k$ für eine Konstante k).
Der Vorbereich von t ist nicht leer, da sonst t nicht tot bei m wäre. Wenn $\bullet t$ nur Stellen enthält, die bei den Markierungen aus $R(N, m_0)$ nicht beschränkt sind, so ist t erneut nicht tot bei m. Somit enthält $\bullet t$ mindestens ein Element aus D, womit D nicht leer ist.

Die Menge D ist sogar ein Deadlock. Um dies einzusehen, betrachten wir $t' \in \bullet D$. Wenn $\bullet t'$ leer ist oder keine bei den Markierungen aus $R(N, m)$ beschränkte Stelle enthält, so kann t' in N beliebig oft schalten. Dies liefert, dass es in D mindestens eine unbeschränkte Stelle gibt, was im Widerspruch zur Definition von D steht. Somit enthält t' im Vorbereich eine beschränkte Stelle s'. Folglich gibt es einen Weg $s' \to t' \to s'' \to \ldots \to t$ (mit $s'' \in D$. Daher ist s' ein Element von D und wir haben $t' \in D\bullet$.

Da wir nach Voraussetzung keinen Deadlock in N haben, ist unsere Annahme falsch und N lebendig. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Dazu betrachten wir das Netz N_{15}, das in Abbildung 3.18 zusammen mit seinem Erreichbarkeitsgraphen gegeben ist. Da die drei erreichbaren Markierungen zyklisch durchlaufen werden, wobei jede Transition einmal geschaltet wird, ist N_{15} lebendig. Jedoch ist wegen

$$\bullet\{p_2, p_3\} = \{t_1, t_2\} = \{p_1, p_2\}\bullet$$

die Menge $\{p_2, p_3\}$ sowohl Deadlock als auch Falle.

Wir geben nun eine Netzeigenschaft an, die sich für gewisse Netze als hinreichend und notwendig für Lebendigkeit erweisen wird.

Definition 3.115 *Ein Petri-Netz $N = (S, T, F.V, m_0)$ hat die Deadlock-Fallen-Eigenschaft, wenn jeder (nichtleere) Deadlock von N eine (nichtleere) Falle enthält, die bei m_0 mindestens eine Marke trägt.*

Wir haben das Wort nichtleer in Definition 3.115 beide Male in Klammern gesetzt, da die Nichtleere aus den anderen Eigenschaften folgt. Da die Falle mindestens eine Marke

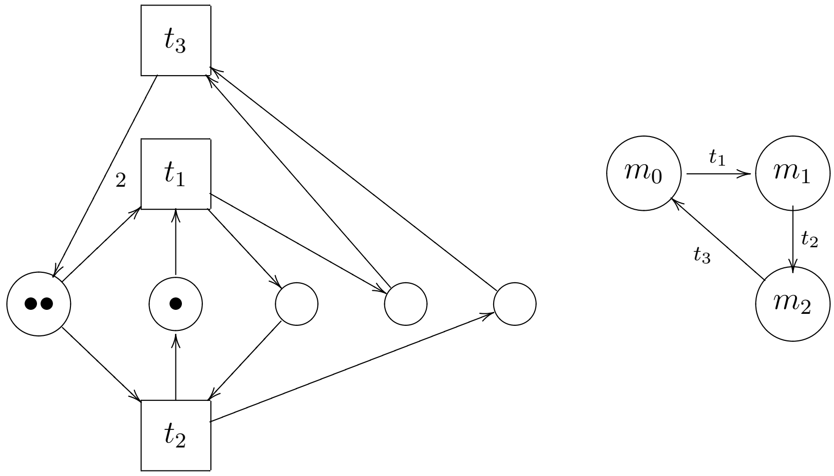

Abbildung 3.18: Netz N_{15} und sein Erreichbarkeitsgraph mit $m_0 = (2,1,0,0,0)$, $m_1 = (1,0,1,1,0)$, $m_2 = (0,1,0,1,1)$, wobei die Stellen von links nach rechts angeordnet sind

trägt, kann sie nicht leer sein. Da der Deadlock eine nichtleere Falle enthält, ist er selbst auch nicht leer.

Aus der Existenz von maximalen Fallen in jeder Menge von Stellen (siehe Satz 3.110 iii)) folgt sofort das folgende Kriterium für die Deadlock-Fallen-Eigenschaft, das gegenüber der Definition die zu betrachteten Deadlocks und Fallen einschränkt.

Satz 3.116 *Ein Petri-Netz $N = (S, T, F.V, m_0)$ hat genau dann die Deadlock-Fallen-Eigenschaft, wenn die maximale Falle eines jeden minimalen Deadlocks von N bei m_0 mindestens eine Marke trägt.*

Beweis. Wenn N die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat, so gibt zu jedem Deadlock D eine Falle D', die mindestens eine Marke trägt. Damit trägt auch die maximale Falle $D'' \supseteq D'$ von D eine Marke. Dies gilt aber sicher auch für den Spezialfall minimaler Deadlocks.

Es gelte nun, dass die maximale Falle eines jeden minimale Deadlocks eine Marke trägt. Ferner sei D ein nichtleerer Deadlock. Dann gibt es einen minimalen Deadlock D_1 mit $D_1 \subseteq D$. Es sei D' die maximale Falle von D_1. Offenbar ist auch $D' \subseteq D$. Da D' nach Voraussetzung eine Marke trägt, gibt es zu D eine in D enthaltene nichtleere Falle mit einer Marke. Da D beliebig gewählt war, hat N die Deadlock-Fallen-Eigenschaft. □

Satz 3.117 *Wenn ein Petri-Netz $N = (S, T, F.V, m_0)$ die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat, so ist $\bullet s \neq \emptyset$ für jede Stelle $s \in S$.*

Beweis. Angenommen, es gilt $\bullet s = \emptyset$ für eine Stelle $s \in S$. Dannn ist $\{s\}$ ein Deadlock, da $\bullet\{s\} = \emptyset \subseteq \{s\}\bullet$ stets gilt. Aber $\{s\}$ ist keine Falle, denn wegen des Zusammenhangs von N ist $s\bullet$ nicht leer und damit keine Teilmenge vom leeren Vorbereich $\bullet s$. Damit enthält der Deadlock $\{s\}$ keine nichtleere Falle und somit erst keine Falle mit Marke im Widerspruch zur vorausgesetzten Deadlock-Fallen-Eigenschaft. □

Satz 3.118 *Wenn das gewöhnliche Petri-Netz N die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat, so gibt es in der Erreichbarkeitsmenge von N keine tote Markierung.*

Beweis. Angenommen, die Markierung $m \in R(N, m_0)$ ist tot. Wir setzen

$$D = \{s \mid s \in S \text{ und } m(s) = 0\}.$$

Die Menge D ist nicht leer, da sonst jede Stelle von S eine Marke bei m trägt, womit m nicht tot wäre.

Sei nun $t \in \bullet D$. Da t tot bei m ist, kann t bei m nicht aktiviert sein. Folglich ist $\bullet t \cap D \neq \emptyset$.Damit gilt auch $t \in D\bullet$, womit D als Deadlock nachgewiesen ist. Die Menge D hat bei m keine Marke. Damit hat jede Falle in D auch keine Marke bei m. Nach Folgerung 3.109 ii) trägt daher auch keine Falle in D eine Marke bei m_0. Dies widerspricht aber der Deadlock-Fallen-Eigenschaft. □

Wir betrachten nun einen gewöhnlichen Synchronisationsgraphen N, d.h. ein Petri-Netz, bei dem der Vorbereich und der Nachbereich einer jeder Stelle einelementig sind, und einen nichtleerer Deadlock D darin. Da $D \neq \emptyset$ ist, gibt es ein s_1 in D. Es sei t_1 die (einzige) Transition aus $\bullet s_1$. Da D ein Deadlock ist, gilt

$$t_1 \in \bullet s_1 \subseteq \bullet D \subseteq D \bullet .$$

Folglich gibt es eine Stelle s_2 mit $t_1 \in s_2\bullet$. Falls $s_1 = s_2$ gilt, so haben wir einen Kreis in D gefunden. Ist $s_2 \neq s_1$, so gilt $\bullet s_2 = \{t_2\}$ mit $t_2 \neq t_1$. Analog zu oben, gibt es eine Stelle $s_3 \in D$ mit $t_2 \in s_3\bullet$. Falls $s_3 = s_1$ oder $s_3 = s_2$ gilt, haben wir erneut einen Kreis in D gefunden. Anderenfalls fahren wir analog fort. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich ein Kreis in D, da wir nur endlich viele Stellen haben.

Wir haben damit gezeigt, dass jeder nichtleere Deadlock einen Kreis enthält. Die minimalen Deadlocks müssen daher die elementaren Kreise von N sein.

Analog zeigt man, dass jede Falle einen Kreis enthält.

Ist D nun ein minimaler Deadlock, so stimmt er daher mit seiner maximalen Falle überein. Die maximalen Fallen minimaler Deadlocks sind also Kreise.

Nach Satz 3.42 ist ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph N genau dann lebendig, wenn jeder Kreis von N eine Marke trägt. Folglich tragen die maximalen Fallen von minimalen Deadlocks von N Marken. Damit ist gezeigt, dass ein lebendiger gewöhnlicher Synchronisationsgraph die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat.

Umgekehrt habe nun ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph die Deadlock-Fallen-Eigenschaft. Dann trägt jeder elementare Kreise als maximale Fallen von einem minimalen Deadlocks eine Marke. Dann tragen aber auch alle Kreise eine Marke, da jeder Kreis einen elementaren enthält. Damit ist N lebendig.

Daher haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3.119 *Ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph ist genau dann lebendig, wenn er die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat.*

Diese Aussage lässt sich noch auf gewöhnliche erweiterte Free-Choice-Netze verallgemeinern.

Satz 3.120 *Es sei N ein gewöhnliches erweitertes Free-Choice-Netz. Dann ist N genau dann lebendig, wenn N die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat.* □

Wir geben hier nicht den vollständigen Beweis. Wir beweisen die Aussage nur in einer Richtung und nur für Free-Choice-Netze. Wir geben zuerst einige Begriffe und Behauptungen, aus denen dann die gewünschte Teilaussage von Satz 3.120 folgt.

Wir nennen eine Menge $T' \subseteq T$ aktivierbar bei m, wenn es für jedes $t \in T'$ eine Markierung $m_t \in R(N, m)$ gibt, bei der t aktiviert ist.

Behauptung 1. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Free-Choice-Netz und $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen. Falls die Menge $(\bullet T')\bullet$ bei m_0 aktivierbar ist, so ist auch T' bei m_0 aktivierbar.

Beweis. Angenommen, T' ist nicht aktivierbar. Dann gibt es ein $t_1 \in T'$, für das es kein $m_{t_1} \in R(N, m_0)$ gibt, bei dem t_1 aktiviert ist. Es sei $s \in \bullet t_1$. Wir betrachten eine Transition

$$t_2 \in (s\bullet) \setminus T' \subseteq ((\bullet T')\bullet) \setminus T' .$$

Ein solches t_2 existiert, denn bei $T' \subseteq (\bullet T')\bullet$ gilt offenbar und bei Gleichheit wäre T' nach Voraussetzung aktivierbar und wir hätten einen Widerspruch zu unserer Annahme. Wegen $t_2 \notin T'$ und $t_1 \in T'$ haben wir $t_1 \neq t_2$. Damit ist die Menge $s\bullet$ nicht einelementig. Nach der Definition 2.10 v) eines Free-Choice-Netzes gelten daher $\bullet t_1 = \bullet t_2 = \{s\}$, denn wir haben $(t_1, s) \in F$ und $(t_2, s) \in F$. Damit ist aber t_1 genau dann aktiviert, wenn t_2 aktiviertt ist. Nach Voraussetzung gibt es für $t_2 \in (\bullet T')\bullet$ eine Markierung m_{t_2}, bei der t_2 aktiviert ist. Damit ist auch t_1 bei m_{t_2} aktiviert. Dies widerspricht der Wahl von t_1 als bei m_0 nicht aktivierbarer Transition. □

Für eine Markierung m eines Petri-Netzes N, setzen wir

$$\overline{m} = \{s \mid m(s) = 0\}.$$

Behauptung 2. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Free-Choice-Netz und $T' \subseteq T$ eine bei m_0 nicht aktivierbare Menge von Transitionen. Dann gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ derart, dass $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m})$ nicht aktivierbar bei m ist.

Beweis. Es seien m_1 eine in N erreichbare Markierung und $t \in \bullet(\bullet T' \cap \overline{m_1})$ eine bei m_1 aktivierte Transition. Durch Schalten von t entstehe aus m_1 die Markierung m_2, die eine Marke auf der Stelle $s \in \bullet T' \cap \overline{m_1}$ habe. Es gelte $m_0 \,[q > m_1 \,[t > m_2$. Dann sind alle Transitionen, die in qt vorkommen nicht aus T', da T' nicht aktivierbar ist. Damit sind sie nach Behauptung 1 auch nicht aus $(\bullet T')\bullet$. Daher entziehen die Transitionen aus qt der Menge $\bullet T'$ keine Marken. Folglich wird der Teil von $\bullet T'$ ohne Marken immer kleiner. Damit gilt

$$\bullet T' \cap \overline{m_2} \subseteq \bullet T' \cap \overline{m_1} \subseteq \bullet T' \cap \overline{m_0} .$$

Es gilt bei unserer Konstruktion sogar $\bullet T' \cap \overline{m_2} \subset \bullet T' \cap \overline{m_1}$, da s in $\bullet T' \cap \overline{m_1}$ aber nicht in $\bullet T' \cap \overline{m_1}$ ist. Würde stets ein solches s existieren, d.h. stets echte Inklusion gelten, so würde $\bullet T' \cap \overline{m_k} = \emptyset$ nach endlich vielen Schritten eintreten. Dann würde aber jede Stelle von $\bullet T'$ markiert sein, was der Voraussetzung widerspricht, dass T' nicht aktivierbar ist. Somit muss es eine erreichbare Markierung m geben, bei der keine Stelle aus $\bullet T' \cap \overline{m}$ zusätzlich markiert wird. Damit kann keine Transition aus $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m_1})$ mehr schalten, womit gezeigt ist, dass sie bei M nicht mehr aktivierbar sind. □

Behauptung 3. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen. Wenn $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m_0}) \subseteq T'$ gilt, so ist entweder T' aktivierbar bei m_0 oder

$\bullet T' \cap \overline{m_0}$ *ist ein Deadlock.*
Beweis. Es sei T' nicht aktivierbar bei m_0. Wir haben dann zu zeigen, dass $\bullet T' \cap \overline{m_0}$ ein Deadlock ist.

Es seien $Q = \bullet T' \cap \overline{m_0}$ und $t \in \bullet Q$. Dann ist $t \in T'$ nach Voraussetzung und damit nicht aktivierbar bei m_0. Damit ist $\bullet t \cap \overline{m_0} \neq \emptyset$, weil sonst t bei m_0 aktiviert wäre. Es sei $s \in \bullet t \cap \overline{m_0}$. Dann gilt natürlich $s \in \overline{m_0}$. Wegen $t \in T'$, ist s in $\bullet T'$ enthalten. Damit haben wir $s \in Q$. Damit ist $t \in s\bullet \subseteq Q\bullet$, womit Q als Deadlock nachgewiesen ist. □

Behauptung 4. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Free-Choice-Netz und $T' \subseteq T$ eine bei m_0 nicht aktivierbare Menge von Transitionen. Dann gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ und einen Deadlock von N, der bei m nicht markiert ist.
Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Transitionen in $T \setminus T'$.

Als Induktionsanfang wir haben $\#(T \setminus T') = 0$. Dann gilt $T' = T$ und damit $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m_0}) \subseteq T = T'$. Damit folgt aus Behauptung 3, dass wir den Deadlock $\bullet T' \cap \overline{m_0}$ haben.

Sei nun $\#(T \setminus T') = n + 1$. Aus Behauptung 2 folgt, dass es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ so gibt, dass $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m})$ nicht aktivierbar bei m ist. Falls $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m}) \subseteq T'$ gilt, so folgt aus Behauptung 3 (mit m anstelle von m_0), dass $\bullet T' \cap \overline{m}$ ein Deadlock ist.

Es sei daher $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m})$ nicht in T' enthalten. Dann gibt es eine Transition t in $\bullet(\bullet T' \cap \overline{m}) \setminus T'$. Aus Behauptung 2 folgt nun, dass $T' \cup \{t\}$ bei m_0 nicht aktivierbar ist. Weiterhin ist $\#(T \setminus (T' \cup \{t\})) = n$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es damit in N einen Deadlock D und eine Markierung $m' \in R(N, m)$, der bei D nicht markiert ist. Offensichtlich ist aber auch $m' \in R(N, m_0)$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wir kommen nun zu der einen Richtung von Satz 3.120, die wir beweisen wollen.

Satz 3.120' *Wenn ein gewöhnliches Free-Choice-Netz N die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat, dann ist N lebendig.*
Beweis. Angenommen, N ist nicht lebendig. Dannn gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ und eine Menge T' von Transitionen so, dass T' nicht aktivierbar bei m ist. Entsprechend Behauptung 4 gibt es dann eine Markierung $m' \in R(N, m)$ mit einem unmarkierten Deadlock D.

Auf der anderen Seite enthält nach der Deadlock-Fallen-Eigenschaft jeder Deadlock eine bei m_0 markierte Falle. Nach Satz 3.109 ii) sind diese Fallen bei jeder erreichbaren Markierung eine Marke. Daher enthält die zu D gehörende Falle bei m' eine Marke. Daher ist auch D bei m' markiert. Damit haben wir einen Widerspruch zu der oben abgeleiteten Eigenschaft von D, bei m' unmarkiert zu sein. □

Entsprechend Satz 3.120' kannn die Lebendigkeit eines gewöhnlichen erweiterten Free-Choice-Netzes dadurch überprüft werden, dass man testet, ob das Netz die Deadlock-Fallen-Eigenschaft hat. Dies ist bei einem Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ mit n Stellen sicher dadurch machbar, dass man jede Teilmenge von S überprüft, ob sie ein Deadlock ist, im positiven Fall die maximale Falle darin bestimmt und testet, ob diese bei der Anfangsmarkierung m_0 eine Marke trägt. Die Deadlocks können wir durch Breitensuche bestimmen, wobei wir mit der leeren Menge beginnen und immer ein Element hinzufügen. Die maximale Falle lässt sich ebenfalls durch Breitensuche bestimmen, wobei wir mit dem Deadlock beginnen und Elemente entfernen. Offensichtlich hat dieser Algorithmus exponentielle

Komplexität in n, da 2^n Teilmengen von S auf Deadlockeigenschaft und für jeden Deadlock maximal alle Teilmengen (d.h. höchstens 2^n Teilmengen) auf die Falleneigenschaft zu testen sind.

Andererseits kann exponentielle Komplexität in n auch nicht vermieden werden, wie das Netz N_{16} aus Abbildung 3.19 zeigt, das bei $2n$ Stellen genau 2^n minimale Deadlocks hat. Dies folgt daraus, dass N_{16} ein Synchronisationsgraph ist, also die minimalen Deadlocks gerade durch die elementaren Kreise gegeben sind. Jeder elementare Kreis enthält genau einen der Knoten s_i und s_i', $1 \leq i \leq n$. Folglich gibt es genau 2^n elementare Kreise.

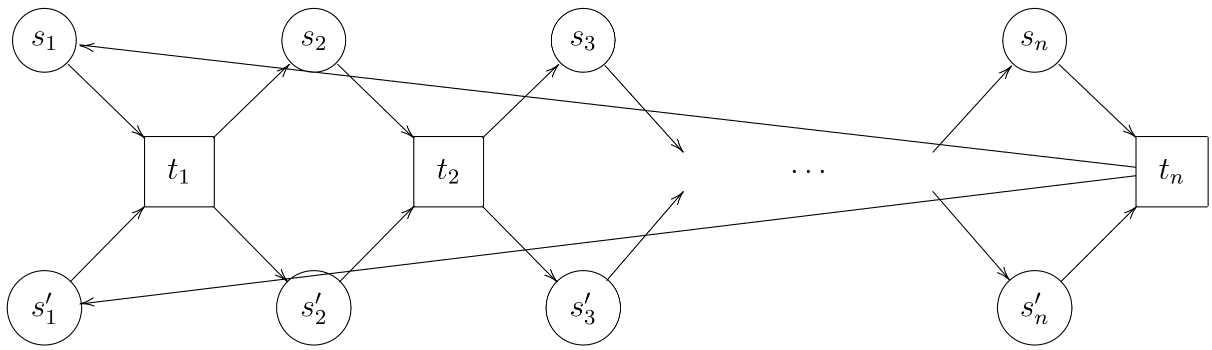

Abbildung 3.19: Netz N_{16}