

**Prof. Dr. Jürgen Dassow**  
**Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg**  
**Fakultät für Informatik**

**P E T R I — N E T Z E**

**Vorlesungsskript**

Magdeburg, Oktober 2010 – Januar 2011



# Vorwort

Petri-Netze gehören zu den meist benutzten Werkzeugen in der Informatik. Sie werden zur Modellierung in einer Vielzahl von Bereichen mit zum Teil sehr unterschiedlicher Ausprägung angewendet. Sie werden in der Informatik z.B. zur Simulation von „klassischen“ Berechnungen, als formales Modell zur Beschreibung von Kommunikationsprotokollen, fehlertoleranten Systemen und Betriebssystemen eingesetzt, finden aber auch in der Wirtschaftsinformatik Verwendung bei der Beschreibung von Geschäftsprozessen und anderen organisatorischen Abläufen. In einigen Fällen werden Petri-Netze schon zu den Beschreibungssprachen gerechnet. Durch die Vielfalt der Anwendungen und deren Bedeutung sollte daher jeder Informatiker, also auch jeder Studierende der Informatik oder informatiknaher Fächer gewisse Grundkenntnisse über Petri-Netze besitzen. Daher scheint es mir sehr wichtig, dass Vorlesungen über Petri-Netze angeboten werden.

Es gibt zwei Aspekte bei Petri-Netzen. Der eine betrifft den Entwurf von Petri-Netzen, der andere die Analyse von Petri-Netzen. Beim zweitgenannten Aspekt geht es darum, festzustellen, ob ein gegebenes Petri-Netz gewisse Eigenschaften hat oder nicht. Dieses ist wichtig, da man stets zu prüfen hat, ob ein entworfenes Netz die Anforderungen erfüllt, die an den Entwurf gestellt wurden. Zwei Methoden stehen zum Testen zur Verfügung. Man kann Experimente durchführen und überprüfen, ob bei diesen das Resultat mit dem der Praxis übereinstimmt, oder man verwendet Algorithmen, mittels deren das Vorhandensein oder Fehlen gewisser Eigenschaften festgestellt werden kann. Der zweite Ansatz hat den Vorteil, dass er ein gesichertes endgültiges Resultat liefert, während man bei Experimenten auch bei der korrekten Widerspiegelung in allen Test nicht abschließend weiß, ob das Netz die Eigenschaft hat.

In dieser Vorlesung, die der Vertiefungsrichtung Theoretische Informatik zugerechnet wird, werden wir im Wesentlichen – neben den erforderlichen Grundbegriffen der Theorie der Petri-Netze – die algorithmische Analyse von Petri-Netzen behandeln. Abschließend werden einige Resultate über Petri-Netz-Sprachen behandelt.

Die Vorlesung ist für Studierende der Informatik und aller informatiknahen Fachrichtungen geeignet. Vorausgesetzt werden – bis auf den letzten Teil zu Sprachen – nur Grundkenntnisse der Mathematik (insbesondere Graphentheorie und lineare Algebra) und einige Algorithmen, wie sie in jeder Vorlesung zu Algorithmen und Datenstrukturen vermittelt werden. Im letzten Teil sind Basiskonzepte der Theoretischen Informatik (formale Sprachen und Automaten) erforderlich, die aber auch in anderen Teilen an einigen Stellen hilfreich sind.

Definitionen, Sätze und andere Aussagen, Beispiele usw. werden einheitlich kapitelweise durchnummeriert; daher folgt auf Definition x.y das Beispiel x.y+1 und dann der

Satz  $x.y+2$  und darauf Folgerung  $x.y+3$  usw.. Dadurch soll die Anzahl der Suchräume klein gehalten werden. Nur Abbildungen und Gleichungen werden gesondert nummeriert. Durch  $\square$  wird das Ende eines Beweises angezeigt. Wird auf einen Beweis verzichtet, so steht  $\square$  bereits am Ende der Formulierung der Aussage.

Magdeburg/Lostau, im Herbst/Winter 2010/2011

Jürgen Dassow

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführende Beispiele und Bemerkungen</b>	<b>5</b>
<b>2 Netzgraphen</b>	<b>11</b>
<b>3 Petri-Netze und ihr Verhalten</b>	<b>21</b>
3.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	21
3.2 Beschränktheit und Erreichbarkeit . . . . .	31
3.3 Lebendigkeit . . . . .	38
3.4 Reduktionen . . . . .	45
3.5 Invarianten . . . . .	53
3.6 Fairness und Synchronie . . . . .	61
<b>4 Petri-Netze und formale Sprachen</b>	<b>77</b>
4.1 Einiges aus der Theorie formaler Sprachen . . . . .	77
4.2 Petri-Netz-Sprachen . . . . .	78
4.3 Petri-Netze und Sprachen mit Auswahlkontext . . . . .	88
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>92</b>



# Kapitel 1

## Einführende Beispiele und Bemerkungen

Bevor wir eine Theorie der Petri-Netze in systematischer Weise entwickeln, wollen wir einige Beispiele geben und intuitiv erklären. Dabei sollen zum einen einige Anwendungsbereiche von Petri-Netzen vorgestellt werden, zum anderen wollen wir einige Erläuterungen geben, die in den folgenden Kapiteln als formale und präzise Definitionen erneut auftauchen, dann aber durch diese Betrachtungen motiviert sind.

Wir beginnen mit dem Netz aus Abbildung 1.1, durch das die Werte der Booleschen Funktionen  $(x \wedge y)$  und  $(x \vee y)$  bei Eingabe von  $x$  und  $y$  berechnet werden. Dies geschieht auf folgende Weise: Die zu Beginn auf den Stellen  $x$  und  $y$  (oben) liegenden Marken  $\bullet$  werden entsprechend den Pfeilen weitergeschoben. Ein Schieben „durch“ ein Quadrat ist nur dann möglich, wenn alle Kreise, von denen ein Pfeil zum Quadrat geht, mit einer Marke  $\bullet$  versehen ist. Außerdem wird bei Abarbeitung eines Quadrats jeder Kreis, zu dem ein Pfeil vom Quadrat ausgeht, mit einer Marke belegt. Können zwei Quadrate aktiv werden (die Kreise, von denen Pfeile zu den Quadraten führen, sind alle markiert) und gibt es einen Kreis, von dem zu beide Quadraten eine Kante führt, so wird nichtdeterministisch eines der Quadrate gewählt und zum Verschieben der Marken genutzt.

Zu Beginn liegen die beiden Marken in den mit  $x$  und  $y$  bezeichneten Kreisen in der ersten Reihe. Wir wählen jetzt sowohl für  $x$  als auch  $y$  eine Belegung mit 0 oder 1, d.h. wir schieben die Marken durch das mit  $x = 0$  bzw. mit  $x = 1$  bezeichnete Quadrat und entsprechend für  $y$ . Man rechnet nun leicht nach, dass

- im ersten Kreis der vierten Reihe genau dann eine Marke liegt, wenn  $(x \wedge y)$  den Wert 1 annimmt,
- im zweiten Kreis der vierten Reihe genau dann eine Marke liegt, wenn  $(x \wedge y)$  den Wert 0 annimmt,
- im dritten Kreis der vierten Reihe genau dann eine Marke liegt, wenn  $(x \vee y)$  den Wert 1 annimmt,
- im vierten Kreis der vierten Reihe genau dann eine Marke liegt, wenn  $(x \vee y)$  den Wert 0 annimmt.

Damit sind die Werte von  $(x \wedge y)$  und  $(x \vee y)$  berechnet. Die restlichen Knoten erlauben, dass die Marken wieder nach oben geschoben werden und damit für weitere Belegungen die Werte ausgerechnet werden können.

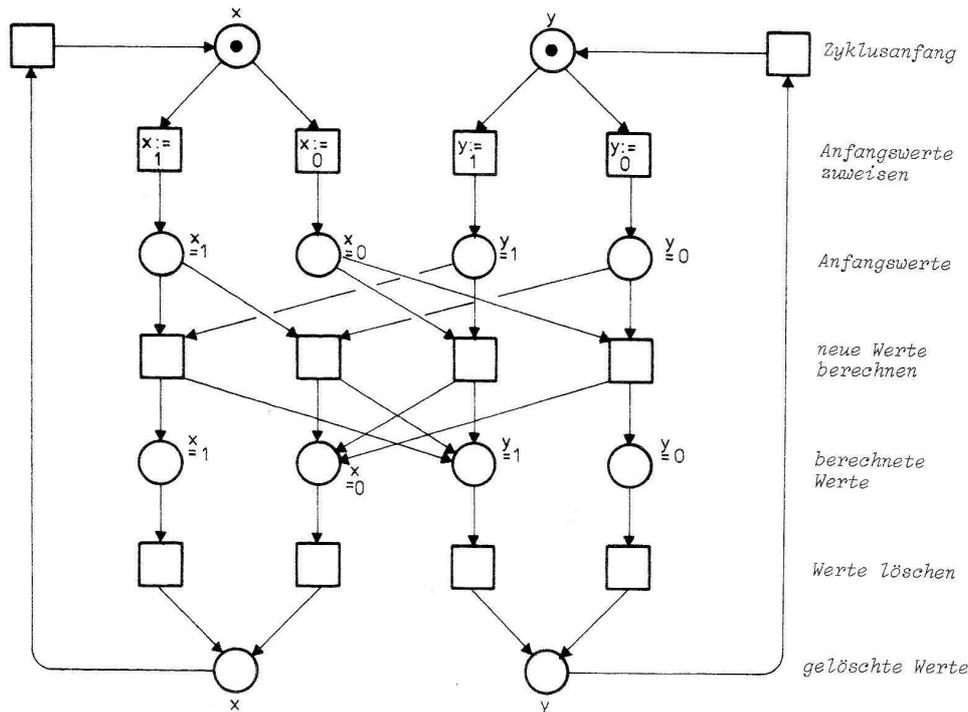


Abbildung 1.1: Petri-Netz zur Berechnung von  $x \wedge y$  und  $x \vee y$

Als nächstes geben wir in Abbildung 1.2 zwei Netze an, mittels derer die Summe zweier natürlicher Zahlen  $x$  und  $y$  berechnet wird, indem schrittweise  $x$  um 1 verkleinert und  $y$  um 1 vergrößert wird.

Die beiden Netze entsprechen einer Umsetzung eines Programms und unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Vergrößerung und Verkleinerung. Wegen der Umsetzung des Programms sind diese beiden Operationen sequentiell auszuführen. Dies ist aber nicht zwingend im Netz erforderlich. Hier könnte eine Parallelität gestattet werden, wie dies in Abbildung 1.3 geschehen ist. Es ist aber anzumerken, dass es sich nicht wirklich um Parallelität handelt, denn die Addition von 1 bzw. Subtraktion von 1 können in einer beliebigen Reihenfolge hintereinander oder gleichzeitig oder zeitlich leicht versetzt (d.h. nicht hintereinander, aber auch nicht gleichzeitig) erfolgen. Es ist nur notwendig beide Operationen auszuführen, bevor der nächste Zyklus eingeleitet wird. Eine derartige Situation wird nebenläufig genannt und ist ein typisches Merkmal von Petri-Netzen, dass durch viele andere Modellierungen nicht erfasst werden kann.

Ein anderes Phänomen, dass durch Petri-Netze modelliert werden kann, sind Konflikte. Diesen Aspekt haben wir schon bei der Berechnung der Booleschen Funktionen gesehen. Dort konnten von den Quadraten in der zweiten Zeile nur das erste oder zweite bzw. nur das dritte oder vierte benutzt werden. Bei Konflikten kann also von mehreren möglichen Quadraten nur eines benutzt werden.

Ein Konflikt wird bei der Modellierung eines Ausschnitts eines Betriebssystems in Abbildung 1.4 genutzt, um zu verhindern, dass gewisse Prozesse nicht gleichzeitig ablaufen können. Auf der linken Seite befinden sich zwei Kreise aus jeweils sechs Knoten. Jeder

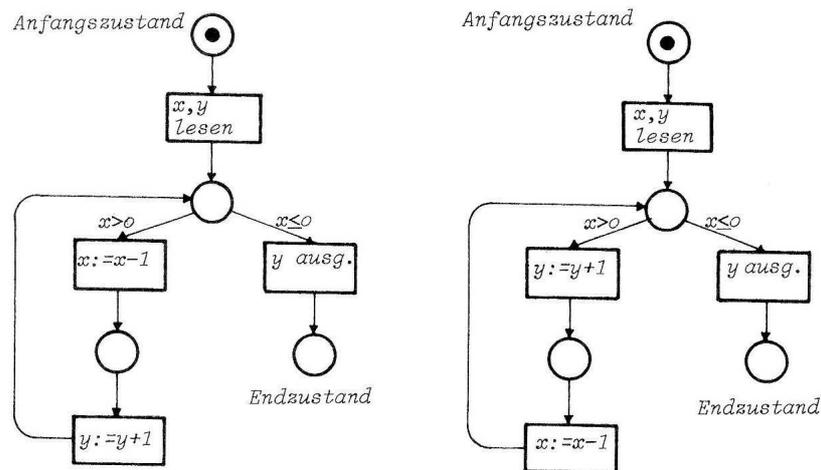


Abbildung 1.2: Petri-Netz zur sequentiellen Berechnung der Addition zweier Zahlen

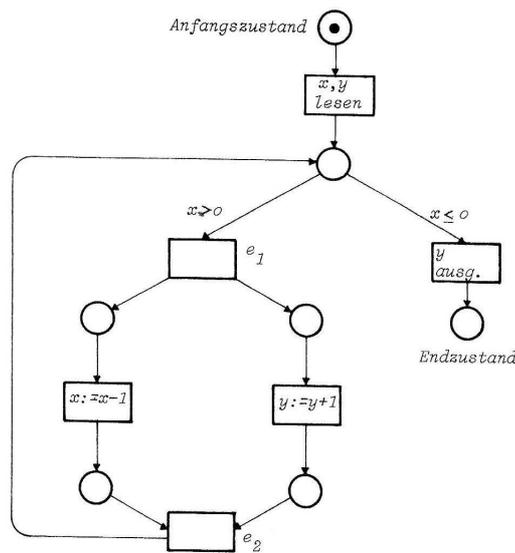


Abbildung 1.3: Petri-Netz zur nebenläufigen Berechnung der Addition zweier Zahlen

dieser Kreise beschreibt einen Schreibprozess. Die drei Kreise aus sechs Knoten auf der rechten Seite beschreiben drei Leseprozesse. Offensichtlich kann nur erlaubt werden, dass höchstens ein Prozess schreibt; auch die Anzahl gleichzeitiger Lesezugriffe ist in der Regel beschränkt; in unserem Beispiel sollen höchst zwei Prozesse gleichzeitig lesen. Der in der Mitte befindliche Knoten dient als Steuerelement. Er trägt zu Beginn zwei Marken. Da entsprechend der Gewichtung 2 für die Kanten vom Steuerelement zu den Schreibprozessen jeder Schreibprozess nur aktiv werden kann, wenn er beide Marken für sich nimmt, kann stets nur ein Prozess schreiben und beim Schreiben eines Prozesse kann nicht gelesen

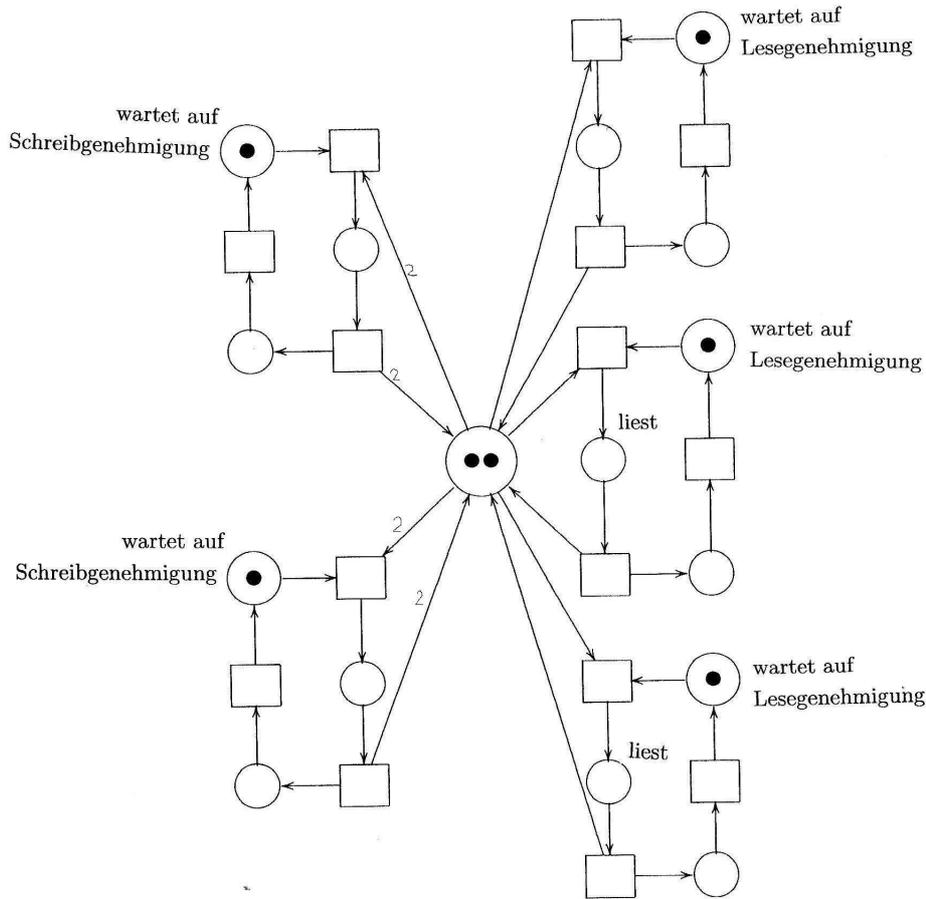


Abbildung 1.4: Petri-Netz eine Teils des Betriebssystems

werden. Nach dem Schreiben werden die beiden Marken wieder ans Steuerelement zurückgegeben. Falls ein Leseprozess aktiv wird, so entnimmt er dem Steuerelement genau eine Marke (die nach dem Lesen zurückgelegt wird). Damit kann kein Schreibprozess aktiv werden und höchstens ein zweiter Leseprozess, der die noch verbliebene Marke des Steuerelements nutzt. Damit sind unsere Forderungen für die Gleichzeitigkeit von Prozessen alle erfüllt.

Als nächstes Beispiel geben wir die „fünf dinierenden Philosophen“. Das Netz ist in Abbildung 1.5 angegeben. Die Philosophen sitzen an einem runden Tisch und können essen, wofür sie für jede Hand eine Gabel benötigen, oder denken. Der Tisch ist nun so gedeckt, dass jeder Philosoph zwar seinen eigenen Teller hat, aber zwischen zwei Tellern jeweils nur eine Gabel liegt. Daher können die Nachbarn eines essenden Philosophen stets nur denken, da ihnen mindestens eine Gabel zum Essen fehlt. Falls alle Philosophen denken, so steht jeder mit seinen Nachbarn hinsichtlich des Essens in einem Konflikt.

Abschließend wollen wir das Petri-Netz aus Abbildung 1.6 betrachten, das die Prozesse in einer Bibliothek beschreibt. Hierbei verwenden wir im Gegensatz zu den bisherigen Netzen verschiedenen Marken benutzen, die Bestellzetteln, Karteikarten und Büchern entsprechen. Falls jemand eine Bestellung an der Bestelltheke abgibt, gibt es zwei Möglichkei-

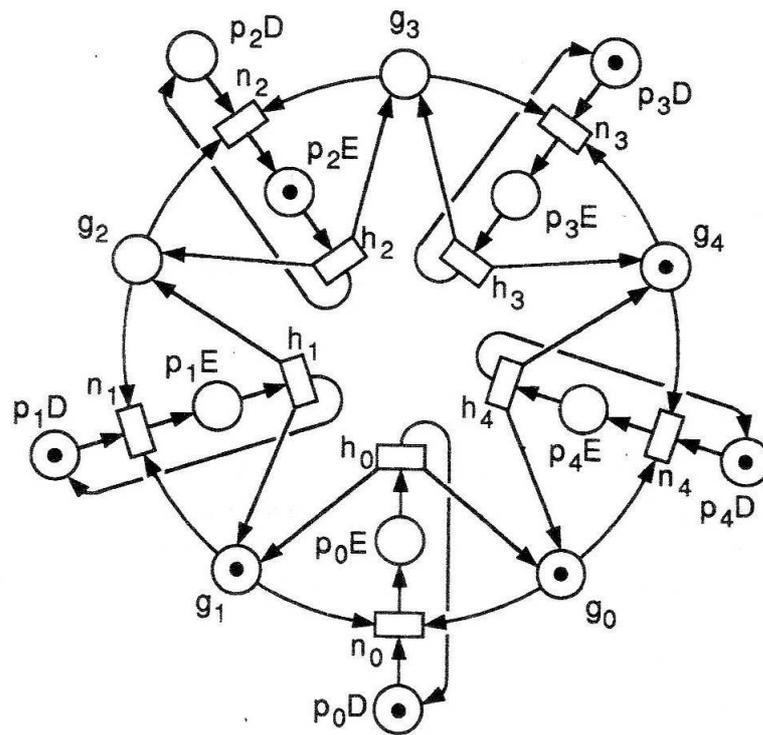


Abbildung 1.5: Petri-Netz der dinierenden Philosophen

ten. Zum einen kann das Buch ausgeliehen sein, d.h. die Karteikarte des Buches befindet sich in der Kartei der ausgeliehenen Bücher; damit kann nur das obere Rechteck aktiviert werden, wodurch das Buch ausgeliehen bleibt (Karteikarte wird wieder in die Kartei der ausgeliehenen Bücher gelegt) und an der Abholtheke eine Nachricht „Buch ist entliehen“ hinterlegt wird. Zum anderen kann das Buch im Lager sein (und die Karteikarte ist im Buch), womit nur das zweite Rechteck von oben aktiviert ist; nun wird das Buch zur Abholtheke gebracht und seine Karteikarte geht in die Kartei der ausgeliehenen Bücher. Man sieht leicht, dass auch der Rückgabeprozess im Netz modelliert ist.

Das Netz aus Abbildung 1.7 gibt eine weitere Abstraktion der Prozesse in der Bibliothek.

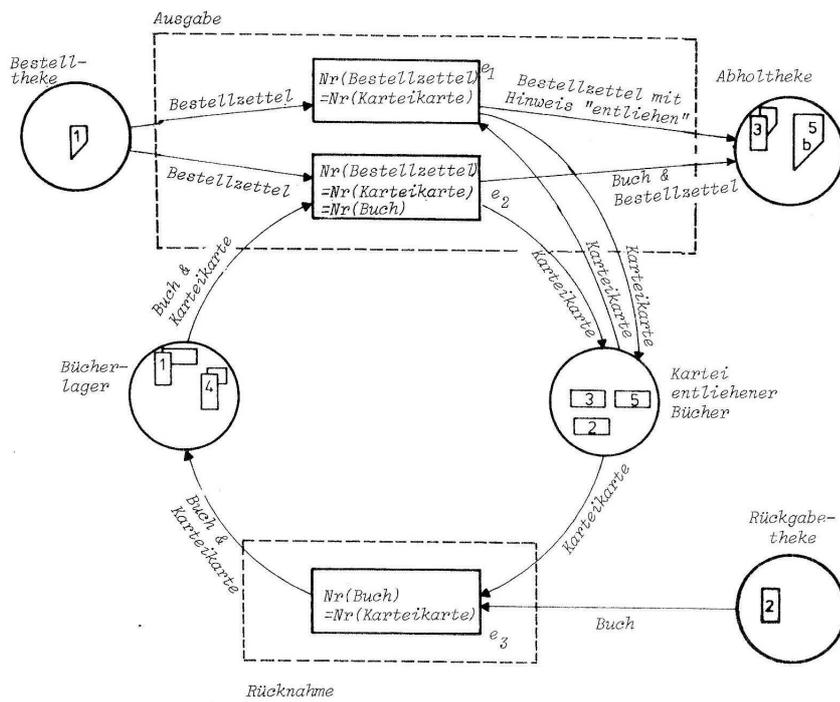


Abbildung 1.6: Modell einer Bibliothek

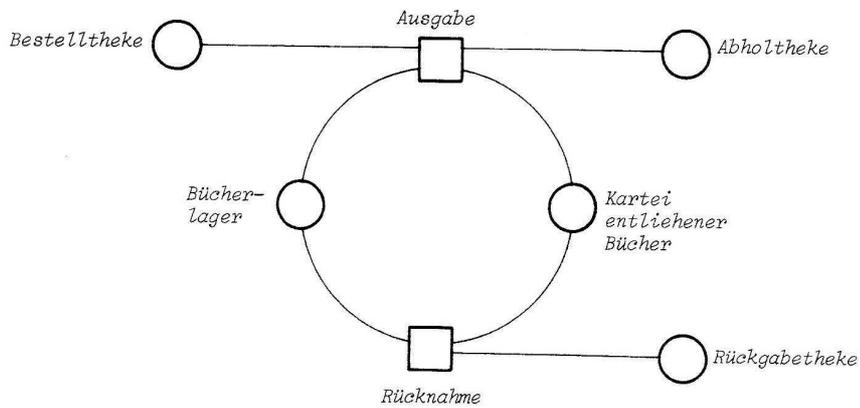


Abbildung 1.7: Vereinfachtes Petri-Netz für die Prozesse in einer Bibliothek

# Kapitel 2

## Netzgraphen

Wie wir in den einführenden Bemerkungen gesehen haben, sind Petri-Netze ein Art von Graphen, die durch die Veränderung der Position der Marken Prozesse beschreiben können. In diesem Abschnitt wollen wir einige Begriffe und spezielle Klassen von Graphen einführen, die zwar für die Theorie der Petri-Netze bedeutsam sind, aber eigentlich nur die graphentheoretische Seite betreffen.

**Definition 2.1** *Ein Netzgraph ist ein Tripel  $N = (S, T, F)$ , wobei*

- $S$  und  $T$  endliche nichtleere Mengen mit  $S \cap T = \emptyset$  sind, und
- $F$  eine Teilmenge von  $(S \times T) \cup (T \times S)$  ist.

Die Elemente aus  $S$  nennen wir *Stellen* oder *Plätze*. Die Elemente aus  $T$  werden *Transitionen* genannt. Die Elemente aus  $F$  sind Kanten.

Wir werden manchmal anstelle von Netzgraphen auch einfach nur von Netzen sprechen.

Zur Darstellung eines Netzgraphen verwenden wir die üblichen Darstellung von Graphen, wobei wir zwei unterschiedliche Arten von Knoten verwenden; die Stellen werden als Kreise und die Transitionen als Vierecke angegeben.

**Beispiel 2.2** Wir betrachten die Netze

$$N_1 = (S_1, T_1, F_1) \quad \text{und} \quad N_2 = (S_2, T_2, F_2)$$

mit

$$\begin{aligned} S_1 &= \{s_1, s_2, s_3\}, & T_1 &= \{t_1, t_2\}, \\ F_1 &= \{(s_1, t_1), (s_1, t_2), (s_2, t_1), (s_2, t_2), (t_1, s_3), (t_2, s_3)\}, \\ S_2 &= \{s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}, & T_2 &= \{t'_0, t'_1, t'_2\}, \\ F_2 &= \{(s'_1, t'_1), (s'_1, t'_2), (s'_2, t'_2), (s'_3, t'_0), (s'_4, t'_2), (t'_0, s'_1), (t'_1, s'_3), (t'_2, s'_4)\}. \end{aligned}$$

In Abbildung 2.1 sind die Netzgraphen  $N_1$  und  $N_2$  graphisch dargestellt.

Man sieht, dass die graphische Darstellung eines Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  erheblich übersichtlicher ist als die Darstellung durch Angabe der Mengen  $S$ ,  $T$  und  $F$ . Wir werden daher zukünftig meist nur die graphische Darstellung angeben.

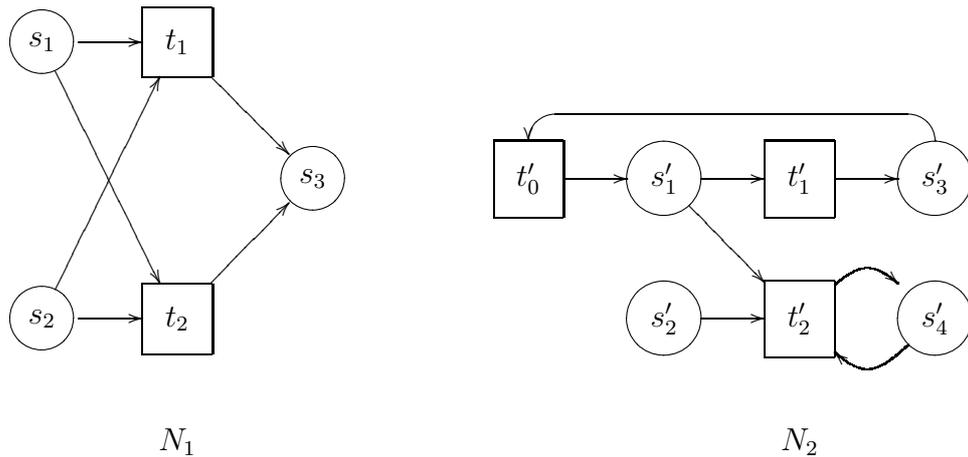


Abbildung 2.1: Zwei Beispiele für Netzgraphen

Aus graphentheoretischer Sicht ist ein Netzgraph ein paarer (oder bipartiter) Graph, denn diese Graphen sind dadurch definiert, dass ihre Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen  $V_1$  und  $V_2$  zerlegt werden kann und keine Kanten zwischen zwei Knoten aus  $V_1$  und keine Kanten zwischen zwei Knoten aus  $V_2$  existieren. Durch die Mengen  $S$  und  $T$  eines Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  ist diese Zerlegung gerade gegeben.

**Definition 2.3** Für ein Element  $x \in S \cup T$  sind der Vorbereich von  $x$  bzw. der Nachbereich von  $x$  durch

$$\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\} \quad \text{und} \quad x\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$$

definiert.

Offensichtlich gilt für  $x \in S$ , dass der Vorbereich und Nachbereich von  $x$  in  $T$  enthalten ist, während Vorbereich und Nachbereich von Elementen  $z \in T$  Teilmengen von  $S$  sind.

Für die Netzgraphen  $N_1$  und  $N_2$  aus Beispiel 2.2 ergibt sich unter anderem

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= \emptyset, \quad s_1\bullet = \{t_1, t_2\}, \quad \bullet t_1 = \{s_1, s_2\}, \quad t_2\bullet = \{s_3\}, \\ \bullet s'_1 &= \{t'_0\}, \quad s'_2\bullet = \{t'_2\}, \quad \bullet t'_2 = \{s'_2, s'_4\}, \quad t'_2\bullet = \{s'_4\} \end{aligned}$$

**Definition 2.4** Ein Netzgraph  $N = (S, T, F)$  heißt schlicht, wenn keine zwei verschiedenen Knoten den gleichen Vor- und den gleichen Nachbereich haben.

In einem schlichten Netzgraphen gilt also für alle  $x$  und  $y$  aus  $S \cup T$ , dass aus  $\bullet x = \bullet y$  und  $x\bullet = y\bullet$  die Beziehung  $x = y$  folgt.

Der Netzgraph  $N_1$  aus Beispiel 2.2 ist nicht schlicht, denn es gelten  $\bullet s_1 = \bullet s_2$  und  $s_1\bullet = s_2\bullet$  für die zwei verschiedenen Stellen  $s_1$  und  $s_2$ . Der Netzgraph  $N_2$  aus Beispiel 2.2 ist schlicht.

**Definition 2.5** i) Ein Netzgraph  $N' = (S', T', F')$  ist ein Teilnetzgraph des Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  falls  $S' \subseteq S$ ,  $T' \subseteq T$  und  $F' \subseteq F$  gelten.

ii) Der Teilnetzgraph  $N' = (S', T', F')$  des Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  heißt induzierter Teilnetzgraph von  $N$ , falls  $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$  gilt.

Bei einem Teilnetzgraphen sind sowohl die Knoten- als auch Kantenmenge eine Teilmenge der entsprechenden Mengen des Netzgraphen  $N$ . Beim induzierten Teilnetzgraph sind alle Kanten von  $N$ , die Knoten aus  $S'$  und  $T'$  miteinander verbinden auch in  $N'$  vorhanden.

**Definition 2.6** Eine Schlinge in einem Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  ist eine Teilnetzgraph  $N' = (\{s\}, \{t\}, \{(s, t), (t, s)\})$  von  $N$ .

Der Netzgraph  $N_1$  aus Beispiel 2.2 enthält keine Schlinge, während  $N_2$  aus Beispiel 2.2 eine Schlinge enthält, die aus der Stelle  $s'_4$  und der Transition  $t'_2$  gebildet wird.

Wir betrachten nun die Netzgraphen  $N_3$  und  $N_4$  aus Abbildung 2.2. Auf den ersten

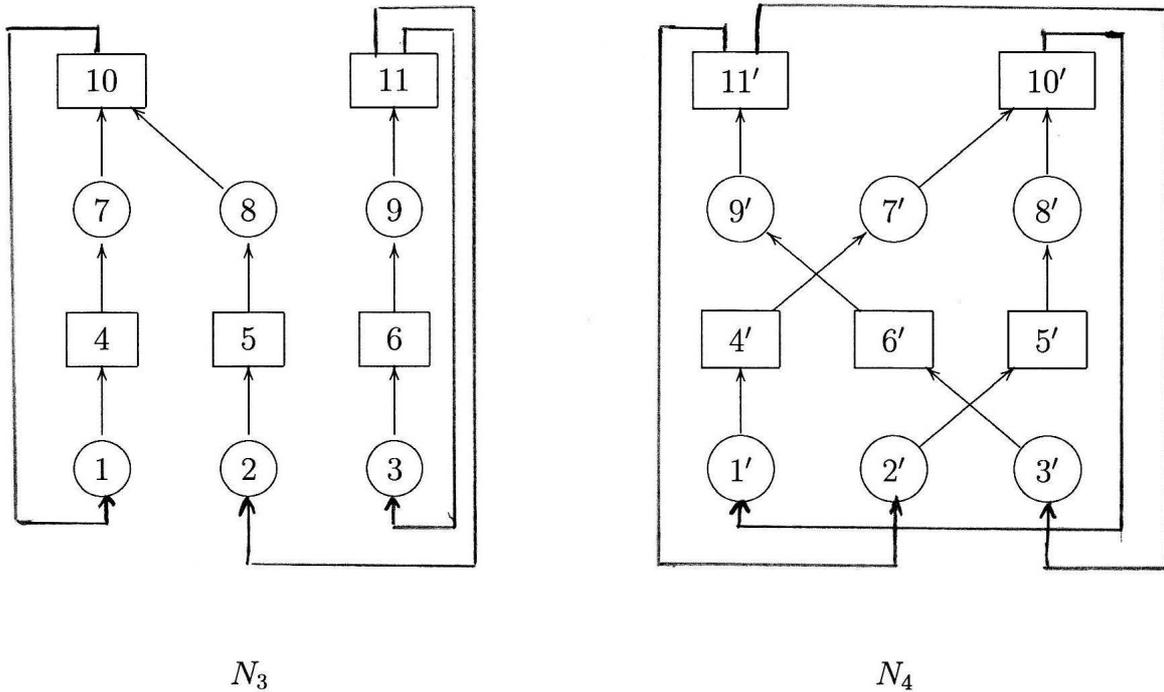


Abbildung 2.2: Zwei isomorphe Netzgraphen

Blick sehen die Netzgraphen sehr verschieden aus, denn bei einem kreuzen sich die Kanten und bei dem anderen nicht. Nimmt man dagegen die Beschreibung beider Graphen durch Mengen, so stellt man fest, dass sich beide Beschreibungen nur dadurch unterscheiden, dass die Knotennamen bei  $N_3$  die Form  $x$  haben, während bei  $N_4$  die gestrichelte Variante  $x'$  verwendet wird. Wir wollen dies hier nur dadurch dokumentieren, dass wir die Vor- und Nachbereiche von 1, 5, 11, 1', 5' und 11' angeben:

- 1 = {10},      •1' = {10'},
- 1• = {4},      1'• = {4'},
- 5 = {2},      •5' = {2'},
- 5• = {8},      5'• = {8'},
- 11 = {9},      •11' = {9'},
- 11• = {2, 3},      11'• = {2', 3'}.

Somit sind die beiden Netzgraphen bis auf die Bezeichnungen identisch. Daher ist eigentlich nicht nötig, diese beiden Graphen zu unterscheiden. Wir präzisieren diesen Ansatz durch folgende Definition.

**Definition 2.7** Eine Abbildung  $\varphi : (S \cup T) \rightarrow (S' \cup T')$  heißt Isomorphismus des Netzes  $N = (S, T, F)$  auf das Netz  $N' = (S', T', F')$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\varphi$  ist eine bijektive Abbildung von  $S \cup T$  auf  $S' \cup T'$  ( $\varphi$  ist eineindeutig und surjektiv),
- $\varphi(S) \subseteq S'$  und  $\varphi(T) \subseteq T'$  ( $\varphi$  ist stellen- und transitionserhaltend),
- $(x, y) \in F$  gilt genau dann, wenn  $(\varphi(x), \varphi(y)) \in F'$  gültig ist.

Wir sagen dann auch, dass  $N$  isomorph zu  $N'$  ist.

Es ist leicht zu sehen, dass die zweite Bedingung wegen der Bijektivität und Surjektivität von  $\varphi$  zu  $\varphi(S) = S'$  und  $\varphi(T) = T'$  verschärft werden kann.

Offensichtlich ist die Abbildung  $\varphi$ , die durch  $\varphi(x) = x'$  für  $x \in \{1, 2, \dots, 10, 11\}$  gegeben ist, ein Isomorphismus von  $N_3$  auf  $N_4$ .

In der Algebra spricht man von einem Isomorphismus zwischen zwei Strukturen, wenn die Abbildung bijektiv, surjektiv und operationserhaltend ist. Die dritte Bedingung in Definition 2.7 besagt, dass im Fall der Netzgraphen  $\varphi$  relationserhaltend sein soll.

Die folgende Aussagen sind einfach zu beweisen (die Beweise können analog zu denen für entsprechende Aussagen in der Algebra geführt werden).

**Lemma 2.8** *i) Die identische Abbildung  $\varphi(x) = x$  der Knotenmenge  $S \cup T$  eines Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  auf sich selbst ist ein Isomorphismus von  $N$  auf sich selbst.*

*ii) Die Umkehrabbildung eines Isomorphismus  $\varphi$  von  $N$  auf  $N'$  ist ein Isomorphismus von  $N'$  auf  $N$ .*

*iii) Die Komposition (Hintereinanderausführung)  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  der Isomorphismen  $\varphi_1$  von  $N$  auf  $N'$  und  $\varphi_2$  von  $N'$  auf  $N''$  ist ein Isomorphismus von  $N$  auf  $N''$ .*

*iv) Die Isomorphie zwischen Netzgraphen ist eine Äquivalenzrelation.*

Wegen Lemma 2.8 iv) können wir die Menge der Netzgraphen in Äquivalenzklassen isomorpher Netzgraphen einteilen. Im Folgenden werden wir Netzgraphen der gleichen Äquivalenzklasse nicht unterscheiden und stets eine für unsere Belange passende Repräsentation angeben.

Wir werden jetzt einige spezielle Klassen von Netzgraphen einführen und die Beziehung zwischen diesen Graphklassen untersuchen.

**Definition 2.9** Ein Netzgraph  $N = (S, T, F)$  heißt Zyklus, wenn es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  und Elemente  $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n$  derart gibt, dass

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, & T &= \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \\ F &= \{(s_i, t_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(t_i, s_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(t_n, s_1)\} \end{aligned}$$

gelten.

Genauer hätte es heißen müssen, dass es einen zu  $N$  isomorphen Netzgraphen mit den angegebenen Mengen gibt; wegen der Identifizierung isomorpher Netzgraphen kann die Definition wie oben gegeben werden.

Die graphische Repräsentation eines Zyklus ist durch einen Netzgraphen der Form aus Abbildung 2.3 gegeben.

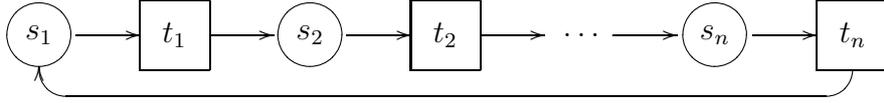


Abbildung 2.3: Form eines Zyklus

**Definition 2.10** i) Ein Netzgraph heißt Zustandsmaschine, wenn

$$|\bullet t| = |t \bullet| = 1 \text{ für alle } t \in T$$

gilt.

ii) Ein Netzgraph heißt Synchronisationsgraph, wenn

$$|\bullet s| = |s \bullet| = 1 \text{ für alle } s \in S$$

gilt.

iii) Ein Netzgraph heißt verallgemeinerte Zustandsmaschine, wenn

$$|\bullet t| \leq 1 \text{ und } |t \bullet| \leq 1 \text{ für alle } t \in T$$

gilt.

iv) Ein Netzgraph heißt verallgemeinerter Synchronisationsgraph, wenn

$$|\bullet s| \leq 1 \text{ und } |s \bullet| \leq 1 \text{ für alle } s \in S$$

gilt.

v) Ein verallgemeinerter Synchronisationsgraph, der keinen Teilgraph enthält, der ein Zyklus ist, heißt Kausalnetz.

v) Ein Netzgraph heißt Free-Choice-Netz, wenn für alle  $s \in S$  und  $t \in T$  gilt, dass

$$(s, t) \in F \cap (S \times T) \text{ impliziert } (s \bullet = \{t\} \vee \bullet t = \{s\}).$$

vi) Ein Netzgraph heißt erweitertes Free-Choice-Netz, wenn für alle  $t_1 \in T$  und  $t_2 \in T$  gilt, dass

$$\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset \text{ impliziert } \bullet t_1 = \bullet t_2.$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{G}(Z)$ ,  $\mathcal{G}(ZM)$ ,  $\mathcal{G}(VZM)$ ,  $\mathcal{G}(SG)$ ,  $\mathcal{G}(VSG)$ ,  $\mathcal{G}(Kausal)$ ,  $\mathcal{G}(FNC)$ , und  $\mathcal{G}(EFCN)$  die Mengen der Zyklen, bzw. Zustandsmaschinen, bzw. verallgemeinerten Zustandsmaschinen, bzw. Synchronisationsgraphen, bzw. verallgemeinerten Synchronisationsgraphen, bzw. Free-Choice-Netze, bzw. erweiterten Free-Choice-Netze.

Für  $X \in \{ZM, VZM, SG, VSG, Kausal, FNC, EFCN\}$  sind in der Abbildung 2.4 Netzgraphen  $N_X$  mit  $N_X \in \mathcal{G}(X)$  angegeben.

Wir geben nun äquivalente Charakterisierungen für einige der in Definition 2.10 eingeführten Klassen an.

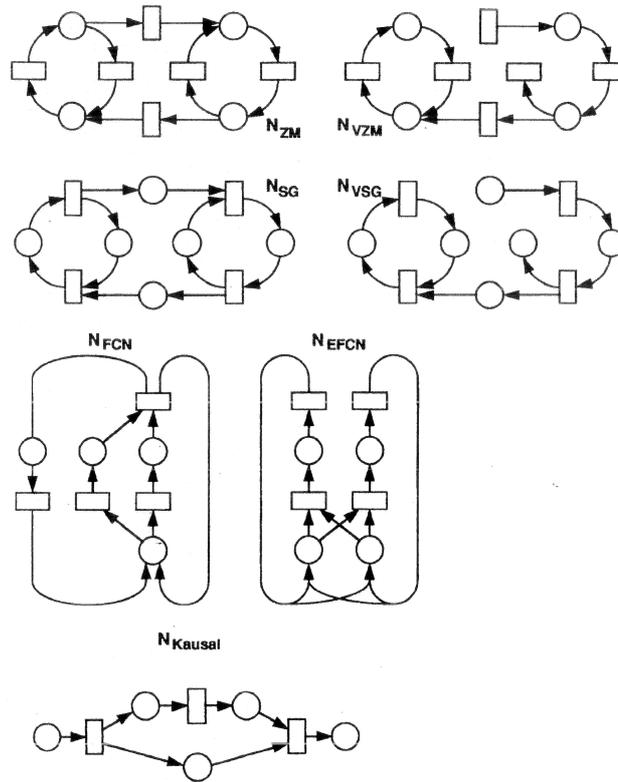
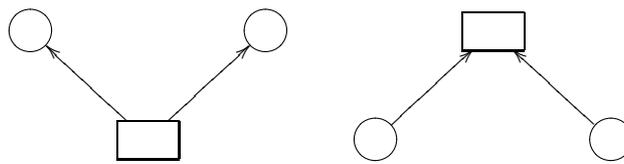


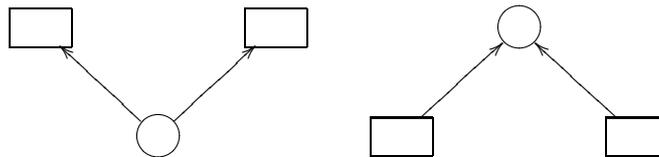
Abbildung 2.4: Vertreter für die Klassen spezieller Netzgraphen

**Lemma 2.11** *i) Ein Netzgraph ist genau dann eine verallgemeinerte Zustandsmaschine, wenn er keinen Netzgraphen der Form*



*als Teilnetzgraphen enthält.*

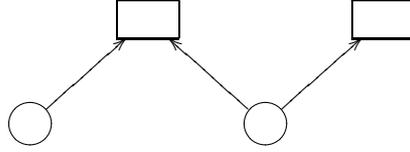
*ii) Ein Netzgraph ist genau dann ein verallgemeinerter Synchronisationsgraph, wenn er keinen Netzgraphen der Form*



*als Teilnetzgraphen enthält.*

*iii) Ein Netzgraph ist genau dann ein Free-Choice-Netz, wenn er keinen Netzgraphen*

der Form



als Teilnetzgraphen enthält.

iv) Ein Netzgraph ist genau dann ein erweitertes Free-Choice-Netz, wenn er bei Beschränkung auf Kanten aus  $S \times T$  keinen induzierten Netzgraphen der Form aus iii) enthält.

*Beweis.* Die Aussagen i), ii) und iii) enthalten im Wesentlichen nur eine graphische Umsetzung der Definition der Klasse und werden daher ohne Beweis angegeben.

iv) Es sei  $N$  kein erweitertes Free-Choice-Netz. Nach Definition ist dies damit gleichwertig, dass es Stellen  $s$  und  $s'$  und Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  derart gibt, dass  $s \in \bullet t_1$ ,  $s \in \bullet t_2$  (d.h.  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$ ),  $s' \in \bullet t_1$  und  $s' \notin \bullet t_2$  (d.h.  $\bullet t_1 \neq \bullet t_2$ ) gelten. Der induzierte Teilnetzgraph mit der Stellenmenge  $\{s, s'\}$  und der Transitionsmenge  $\{t_1, t_2\}$  – bei Beschränkung auf Kanten aus  $S \times T$  – liefert gerade den in iii) gezeigten Graphen.<sup>1</sup>

Es sei  $N$  ein erweitertes Free-Choice-Netz. Wenn  $N$  einen induzierten Teilnetzgraphen der Form aus iii) enthält, so gibt es offenbar zwei Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  mit  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$  und  $\bullet t_1 \neq \bullet t_2$ , womit wir einen Widerspruch zur Definition zur Voraussetzung, dass  $N$  ein erweitertes Free-Choice-Netz ist, erhalten.  $\square$

Die zweite Gruppe von Aussagen charakterisiert die Free-Choice-Netze und erweiterten Free-Choice-Netze durch Implikationen mit gleicher Voraussetzung; es wird jeweils ein nichtleerer Durchschnitt der Nachbereiche zweier Stellen gefordert.

**Lemma 2.12** i) Ein Netzgraph  $N = (S, T, F)$  ist genau dann ein Free-Choice-Netz, wenn für alle  $s_1, s_2 \in S$

$$s_1 \bullet \cap s_2 \bullet \neq \emptyset \text{ impliziert } (s_1 \bullet = s_2 \bullet = \{t\} \text{ für ein } t \in T). \quad (2.1)$$

ii) Ein Netzgraph  $N = (S, T, F)$  ist genau dann ein erweitertes Free-Choice-Netz, wenn für alle  $s_1, s_2 \in S$

$$s_1 \bullet \cap s_2 \bullet \neq \emptyset \text{ impliziert } s_1 \bullet = s_2 \bullet. \quad (2.2)$$

*Beweis.* i) Es sei zuerst  $N$  ein Free-Choice-Netz. Wegen  $s_1 \bullet \cap s_2 \bullet \neq \emptyset$  gibt es ein  $t \in T$  mit  $t \in s_1 \bullet$  und  $t \in s_2 \bullet$ . Damit gilt auch  $\{s_1, s_2\} \subseteq \bullet t$ . Somit ist  $\bullet t$  für  $(s_1, t) \in F$  nicht einelementig. Es muss also der Nachbereich von  $s_1$  einelementig sein. Dies gibt  $s_1 \bullet = \{t\}$ . Analog zeigt man  $s_2 \bullet = \{t\}$ , woraus sofort  $s_1 \bullet = s_2 \bullet = \{t\}$  folgt. Damit ist (2.1) für Free-Choice-Netze nachgewiesen.

Es gelte nun (2.1). Es sei  $(s, t)$  mit  $s \in S$  und  $t \in T$  eine Kante von  $N$ . Falls der Vorbereich von  $t$  einelementig ist, so gilt  $\bullet t = \{s\}$  und damit auch die Alternative  $(s \bullet = \{t\} \vee \bullet t = \{s\})$ , womit die Bedingung für ein Free-Choice-Netz erfüllt ist. Falls der Vorbereich von  $t$  neben  $s$  noch ein Element  $s'$  enthält, so ist  $t \in s \bullet \cap s' \bullet \neq \emptyset$ . Nun

<sup>1</sup>Man bemerke, dass wegen der Induziertheit des Teilgraphen keine Kante von  $s'$  nach  $t_2$  existieren kann. Bei Aussage iii) dieses Lemmas wäre das erlaubt.

erhalten wir aus der Gültigkeit von (2.1) sofort, dass es ein  $t' \in T$  mit  $s \bullet = s' \bullet = \{t'\}$  gibt. Da aber  $t \in s \bullet$  liegt, ergibt sich  $t = t'$  und somit  $s \bullet = \{t\}$ . Damit gilt erneut ( $s \bullet = \{t\} \vee \bullet t = \{s\}$ ).

ii) Es sei zuerst wieder  $N$  ein erweitertes Free-Choice-Netz. Angenommen, die Implikation (2.2) gilt nicht. Dann gelten  $s_1 \bullet \cap s_2 \bullet \neq \emptyset$  und  $s_1 \bullet \neq s_2 \bullet$ . Damit gibt es dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  mit

$$t_1 \in s_1 \bullet \cap s_2 \bullet \quad \text{und} \quad t_2 \in s_2 \bullet \setminus s_1 \bullet. \quad (2.3)$$

Daher haben wir  $s_2 \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2$ . Da  $N$  ein erweitertes Free-Choice-Netz ist, ergibt sich  $\bullet t_1 = \bullet t_2$ . Wegen  $s_1 \in \bullet t_1$ , erhalten wir  $s_1 \in \bullet t_2$  und damit  $t_2 \in s_1 \bullet$ . Andererseits folgt aus der zweiten Beziehung aus (2.3)  $t_2 \notin s_1 \bullet$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch ist, womit (2.2) bewiesen ist.

Es gelte nun (2.2). Völlig analog zeigt man, dass dann auch gilt, dass aus  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2$  die Gleichheit  $\bullet t_1 = \bullet t_2$  folgt. (Man vertausche nur Stellen und Transitionen und gleichzeitig Vor- und Nachbereich im vorstehenden Beweis der umgekehrten Richtung.)  $\square$

Zwischen den Klassen spezieller Netzgraphen gelten die folgenden Inklusionsbeziehungen.

**Satz 2.13** *Es gilt das Diagramm aus Abbildung 2.5. Dabei bedeutet ein Pfeil von  $X$  nach  $Y$ , dass  $X$  eine echte Teilmenge von  $Y$  ist, und zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind genau dann unvergleichbar, wenn es keinen Weg von  $X$  nach  $Y$  bzw. umgekehrt gibt.*

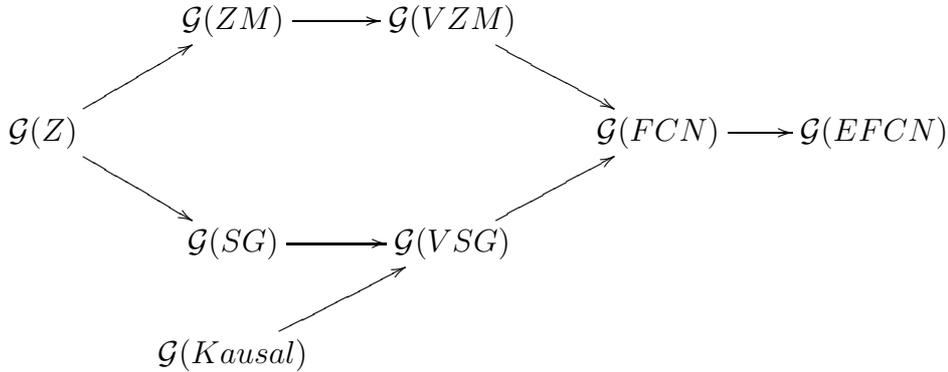


Abbildung 2.5: Hierarchie spezieller Netzgraphklassen

*Beweis.* Bei einem Zyklus (mit den Bezeichnungen aus Definition 2.9) gelten offenbar  $s_i \bullet = \{t_i\}$  für  $1 \leq i \leq n$ ,  $\bullet s_i = \{t_{i-1}\}$  für  $2 \leq i \leq n$  und  $\bullet s_1 = \{t_n\}$ . Damit ist jeder Vor- und Nachbereich einer jeden Stelle einelementig. Somit ist jeder Zyklus ein Synchronisationsgraph.

Analog beweist man, dass jeder Zyklus eine Zustandsmaschine ist.

Es sei  $N = (S, T, F)$  eine verallgemeinerte Zustandsmaschine und  $(s, t) \in F$  mit  $s \in S$  und  $t \in T$  eine Kante von  $N$ . Wegen  $|\bullet t| \leq 1$  und  $s \in \bullet t$ , ist  $|\bullet t| = 1$  und damit  $\bullet t = \{s\}$ . Damit gilt auch ( $\bullet t = \{s\} \vee s \bullet = \{t\}$ ). Somit ist  $N$  ein Free-Choice-Netz.

Analog zeigt man, dass jeder verallgemeinerte Synchronisationsgraph ein Free-Choice-Netz ist.

Die Inklusionen zwischen den Klassen von Free-Choice-Netzen und erweiterten Free-Choice-Netzen folgt aus Lemma 2.12 sofort. Die restlichen Inklusion ergeben sich schon aus den Definitionen.

Die Echtheit aller Inklusionen und die Unvergleichbarkeiten folgen aus den Beispielnetzgraphen aus Abbildung 2.4. Wie man jeweils leicht nachprüft, gilt für alle  $X$  und  $Y$  mit  $X \subseteq Y$  die Beziehung  $N_Y \notin X$ , womit  $X \subset Y$  gezeigt ist.  $\square$

**Definition 2.14** *Es sei  $N = (S, T, F)$  ein Netzgraph.*

*i) Wir sagen, dass das Netz  $N$  zusammenhängend ist, wenn es für zwei beliebige Knoten  $x$  und  $y$  aus  $S \cup T$  einen ungerichteten Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.*

*ii) Wir sagen, dass das Netz  $N$  stark zusammenhängend ist, wenn es für zwei beliebige Knoten  $x$  und  $y$  aus  $S \cup T$  einen gerichteten Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.*

Entsprechend der Definition liegt Zusammenhang dann vor, wenn es eine Folge von Knoten  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n \geq 0$ , derart gibt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$x = x_0, y = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in F \text{ oder } (x_{i+1}, x_i) \in F \text{ für } 0 \leq i \leq n - 1.$$

Beim starken Zusammenhang wird nur geändert, dass  $(x_i, x_{i+1}) \in F$  für  $0 \leq i \leq n - 1$  gelten muss, d.h. es muss stets der Richtung der Kanten gefolgt werden.

Will man (starken) Zusammenhang testen, so hat man nach der Definition alle Paare aus  $(S \cup T) \times (S \cup T)$  zu betrachten. Dies kann für den strengen Zusammenhang etwas vereinfacht werden, da man sich auf  $S \times S$  bzw.  $T \times T$  beschränken kann. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 2.15** *Die folgenden Aussagen sind für einen Netzgraphen  $N = (S, T, F)$ , der  $\bullet x \neq \emptyset$  und  $x \bullet \neq \emptyset$  für alle  $x \in S \cup T$  erfüllt, gleichwertig.*

*i) Der Netzgraph  $N$  ist stark zusammenhängend.*

*ii) Für zwei beliebige Stellen  $s$  und  $s'$  aus  $S$  gibt es einen gerichteten Weg von  $s$  nach  $s'$ .*

*iii) Für zwei beliebige Transitionen  $t$  und  $t'$  aus  $T$  gibt es einen gerichteten Weg von  $t$  nach  $t'$ .*

*Beweis.* i)  $\implies$  ii) und i)  $\implies$  iii) sind trivial, da in ii) bzw. iii) nur die Existenz von Wegen zwischen Stellen bzw. Transitionen gefordert wird.

ii)  $\implies$  i). Wir haben zu zeigen, dass für beliebige Transitionen  $t$  und  $t'$  und eine beliebige Stelle  $s$  Wege von  $t$  nach  $t'$ , von  $s$  nach  $t$  und von  $t$  nach  $s$  existieren.

Es seien  $t$  und  $t'$  zwei Transitionen. Wegen  $t \bullet \neq \emptyset$ , gibt es eine Stelle  $s$  in  $t \bullet$ . Somit existiert eine Kante  $(t, s) \in F$ . Analog zeigt man, dass eine Stelle  $s'$  mit  $(s', t') \in F$  existiert. Nach Voraussetzung gibt es einen gerichteten Weg von  $s$  nach  $s'$ . Wenn wir diesen Weg am Beginn durch  $(t, s)$  und am Ende durch  $(s', t')$  verlängern, erhalten wir einen Weg von  $t$  nach  $t'$ .

Analog beweist man die Existenz von Wegen von Transitionen zu Stellen und von Stellen zu Transitionen.

Der Beweis für iii)  $\implies$  i) kann mit gleichen Argumenten wie ii)  $\implies$  i) erbracht werden; man hat nur Stellen und Transitionen zu vertauschen.  $\square$

Im Rahmen dieser Vorlesung wollen wir stets annehmen, dass die Netzgraphen, die den Petri-Netzen zugrundeliegen, zusammenhängend sind. Dies ist dadurch begründet, dass man sich in den meisten Fällen auf die zusammenhängenden Komponenten zurück ziehen kann.

# Kapitel 3

## Petri-Netze und ihr Verhalten

### 3.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt geben wir die Definition eines Petri-Netzes und einige der damit in engem Zusammenhang stehenden Konzepte.

Der Unterschied zwischen den Netzgraphen des voran gehenden Kapitels und den Petri-Netzen im einführenden Kapitel besteht im Wesentlichen darin, dass bei den Petri-Netzen die Stellen mit (teilweise unterschiedlichen) Marken versehen sind. In diesem Kapitel beschränken wir uns darauf, dass nur ein Art von Marken vorhanden ist. Daher reicht es, die Anzahl der Marken auf einer Stelle anzugeben. Die folgende Definition formalisiert diese Idee.

**Definition 3.1** *Eine Markierung eines Netzgraphen  $N = (S, T, F)$  ist eine Funktion  $m : S \rightarrow \mathbf{N}_0$ , die jeder Stelle eine natürliche Zahl zuordnet.*

Da die Markierung nur von der Menge der Stellen abhängt, werden wir auch sagen, dass  $m$  eine Markierung von  $S$  ist.

Da eine Markierung  $m$  genau auf den Stellen definiert ist und ein Netzgraph nur endlich viele Stellen hat, sagen wir  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , können wir  $m$  auch als  $n$ -dimensionalen Vektor  $(m(s_1), m(s_2), \dots, m(s_n))$  über  $\mathbf{N}_0$  auffassen.

Nun sind wir in der Lage, Petri-Netze zu definieren.

**Definition 3.2** *Ein Petri-Netz ist ein Quintupel  $N = (S, T, F, V, m_0)$ , wobei*

- $(S, T, F)$  ein Netzgraph ist,
- $V : F \rightarrow \mathbf{N}$  eine Funktion ist, die jeder Kante eine natürliche Zahl zuordnet,
- $m_0$  eine Markierung von  $S$  ist.

Zusätzlich zu den Netzgraphkomponenten treten beim Petri-Netz eine Markierung  $m_0$ , die sogenannte Anfangsmarkierung, und eine Funktion  $V$  auf, die jeder Kante  $f \in F$  ein Gewicht  $V(f)$  zuordnet. Die Gewichte werden oft auch *Vielfachheit* genannt. Für  $(x, y) \in F$  werden wir anstelle von  $V((x, y))$  meist nur kurz  $V(x, y)$  schreiben. In unserer graphischen Präsentationen von Petri-Netzen werden wir nur dann das Gewicht an eine Kante schreiben, falls es von 1 verschieden ist. Die Markierung der Stellen wird in den Graphiken stets dadurch angeben, dass wir die Stelle  $s$ , für die  $m(s) = k$  ist, mit  $k$  Marken • versehen.

Petri-Netze heißen *gewöhnlich*, wenn alle Kanten das Gewicht 1 haben.

Wir werden im Folgenden einem Petri-Netz  $N = (S, T, F, V, m_0)$  eine Eigenschaft  $X$  von Netzgraphen zuschreiben, wenn der zum Petri-Netz gehörende Netzgraph  $(S, T, F)$  die Eigenschaft  $X$  hat. So können wir dann zum Beispiel einfach sagen, dass das Petri-Netz eine Zustandsmaschine, ein Free-Choice-Netz usw. ist.

**Beispiel 3.3** In Abbildung 3.1 ist das Petri-Netz  $N_5$  gegeben. In  $N_5$  hat die Kante  $(s_4, t_1)$

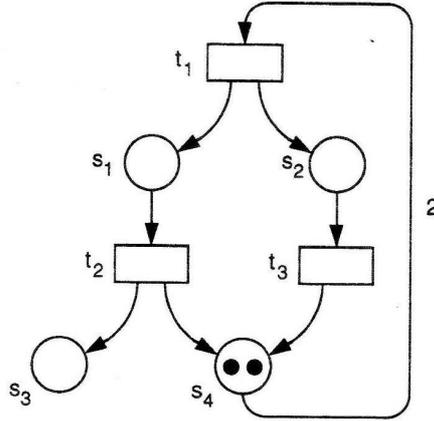


Abbildung 3.1: Petri-Netz  $N_5$

das Gewicht 2, alle anderen Kanten haben das Gewicht 1. Bei der Anfangsmarkierung  $m_0$  wird der Stelle  $s_4$  der Wert 2 zugeordnet und alle anderen Stellen sind mit 0 markiert. Wenn wir für die Stellen die fixierte Anordnung  $s_1, s_2, s_3, s_4$  annehmen, können wir  $m_0$  als Vektor  $(0, 0, 0, 2)$  beschreiben.

Veränderungen in einem Petri-Netz werden dadurch vorgenommen, dass durch Schalten einer Transition des Netzes die Markierung verändert wird. Daher ist es erforderlich festzulegen, wann eine Transition schalten kann und was das Schalten bewirkt.

**Definition 3.4** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $m$  eine Markierung von  $N$  und  $t$  eine Transition aus  $T$ .

i) Wir sagen, dass  $t$  bei  $m$  aktiviert ist, wenn für alle  $s \in \bullet t$  gilt, dass  $m(s) \geq V(s, t)$  gilt.

ii) Wenn  $t$  bei  $m$  aktiviert ist, so kann  $t$  schalten, wodurch aus  $m$  die Markierung  $m'$  entsteht, die durch

$$m'(s) = \begin{cases} m(s) - V(s, t) + V(t, s) & \text{falls } s \in \bullet t \text{ und } s \in t \\ m(s) - V(s, t) & \text{falls } s \in \bullet t \text{ und } s \notin t \\ m(s) + V(t, s) & \text{falls } s \notin \bullet t \text{ und } s \in t \\ m(s) & \text{falls } s \notin \bullet t \text{ und } s \notin t \end{cases}$$

definiert ist.

Das Schalten einer Transition  $t$  besteht intuitiv aus dem Schieben von Marken auf Stellen durch die Transition. Dabei werden jeder Stelle  $s$  aus dem Vorbereich von  $t$  soviel Marken entnommen, wie das Gewicht der Kanten von  $s$  nach  $t$  angibt, und jede Stelle  $s'$  aus dem Nachbereich von  $t$  erhält zusätzlich soviel Marken, wie das Gewicht der Kante von  $t$  nach  $s'$  angibt. Damit dieser Vorgang ablaufen kann, ist es folglich notwendig, dass jede Stelle  $s \in \bullet t$  mindestens soviel Marken enthält, wie das Gewicht der Kante von  $s$  nach  $t$  angibt. Dies bedeutet gerade, dass  $t$  aktiviert unter  $m$  ist.

Wir merken aber an, dass die Vorstellung des Schiebens von Marken für viele Modellierungen nicht völlig zutrifft. Eigentlich werden zuerst die Marken von den Stellen des Vorbereichs genommen, verarbeitet und das Ergebnis der Verarbeitung auf die Stellen des Nachbereichs abgelegt. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn die Marken eine semantische Bedeutung haben.

Wenn aus der Markierung  $m$  durch Schalten von  $t$  die Markierung  $m'$  entsteht, so schreiben wir

$$m [t > m'.$$

**Beispiel 3.3** (Fortsetzung) Im Petri-Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1 ist nur die Transition  $t_1$  aktiviert, durch deren Schalten die Markierung  $m_1$  entsteht, bei der auf  $s_1$  und  $s_2$  jeweils eine Marke liegt. Wir haben also

$$m_0 [t_1 > m_1 = (1, 1, 0, 0).$$

Bei  $m_1$  sind sowohl  $t_2$  als auch  $t_3$  aktiviert. Wir können daher sowohl  $t_2$  als auch  $t_3$  schalten. Dabei erhalten wir

$$m_1 [t_3 > m_2 = (1, 0, 0, 1) \quad \text{und} \quad m_1 [t_2 > m_3 = (0, 1, 1, 1).$$

Bei  $m_2$  ist nun nur  $t_2$  aktiviert, denn  $t_1$  ist nur aktiviert, wenn auf  $s_4$  mindestens zwei Marken liegen, und  $t_3$  ist nur aktiviert, wenn auf  $s_2$  mindestens eine Marke liegt. Analog ist bei  $m_3$  nur  $t_3$  aktiviert. Durch die entsprechenden Schaltungen erhalten wir

$$m_2 [t_2 > m_4 = (0, 0, 1, 2) \quad \text{und} \quad m_3 [t_3 > m_4 = (0, 0, 1, 2),$$

d.h. in beiden Fällen erhalten wir das gleiche Resultat. Nun ist wieder nur  $t_1$  aktiviert, und der eben geschilderte Zyklus kann erneut durchlaufen werden. Offensichtlich wird bei jedem Zyklus eine zusätzliche Marke auf der Stelle  $s_3$  erzeugt. Damit haben wir insgesamt die Markierungen

$$m_{0,i} = (0, 0, i, 2), \quad m_{1,i} = (1, 1, i, 0), \quad m_{2,i} = (1, 0, i, 1), \quad m_{3,i} = (0, 1, i + 1, 1)$$

mit den Übergängen

$$m_{0,i} [t_1 > m_{1,i}, \quad m_{1,i} [t_2 > m_{3,i+1}, \quad m_{1,i} [t_3 > m_{2,i}, \quad m_{2,i} [t_2 > m_{0,i+1}, \quad m_{3,i+1} [t_3 > m_{0,i+1}.$$

Im Beispiel haben wir gesehen, dass durch das Schalten wiederum gewisse Transitionen aktiviert sind, damit schalten können usw. Es ist daher naheliegend, Folgen von Schaltungen zu betrachten, deren Elemente nacheinander geschaltet werden können, d.h. wir erweitern die durch  $[t >$  gegebene Relation auf Folgen aus  $T^*$ . Wir werden dies induktiv über die Länge der Folge definieren.

**Definition 3.5** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz und  $m$  und  $m'$  Markierungen von  $N$ .

i) Wir setzen  $m[\lambda > m]$  ( $\lambda$  ist das leere Wort über  $T$ ,  $|\lambda| = 0$ ).

ii) Es gilt für eine Folge  $q \in T^*$  und eine Transition  $t \in T$  genau dann  $m[qt > m'$ , falls es eine Markierung  $m''$  derart gibt, dass  $m[q > m''$  gilt,  $t$  bei  $m''$  aktiviert ist und  $m''[t > m'$  gilt.

iii) Falls  $m[q > m'$  für ein  $q \in T^*$  und gewisse Markierungen  $m$  und  $m'$  gilt, so nennen wir  $q$  eine Schaltfolge für  $m$ .

iv) Die Beziehung  $m[* > m'$  gilt genau dann, wenn es ein  $q \in T^*$  so gibt, dass  $m[q > m'$  gilt.

**Definition 3.6** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz und  $m$  eine Markierung von  $N$ . Wir setzen

$$R(N, m) = \{m' \mid m[* > m']\} \text{ und } L(N, m) = \{q \mid m[q > m' \text{ für eine Markierung } m']\}.$$

Die Menge  $R(N, m)$  ist die Menge der in  $N$  von  $m$  aus erreichbaren Markierungen und  $L(N, m)$  ist die Menge der Schaltfolgen für  $m$ .

**Beispiel 3.3** (Fortsetzung) Aufgrund unserer obigen Überlegungen erhalten wir für das Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1

$$R(N, m_0) = \bigcup_{i \geq 0} \{m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i}\}$$

während sich für die Markierung  $m_{2,0}$  nur die Menge

$$R(N, m_{2,0}) = \{m_{2,0}\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i}\}$$

ergibt, da die Markierungen  $m_{0,0}$ ,  $m_{1,0}$  und  $m_{3,0}$  von  $m_{2,0}$  aus nicht erreicht werden können. Außerdem gelten

$$\begin{aligned} L(N, m_0) &= \{t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 1 \leq i \leq r\} \\ &\quad \cup \{t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r t_1 u \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r, u \in \{t_2, t_3\}\} \\ &\quad \cup \{t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r t_1 \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\}, \\ L(N, m_{2,0}) &= \{t_2 t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\} \\ &\quad \cup \{t_2 t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r t_1 u \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r, u \in \{t_2, t_3\}\} \\ &\quad \cup \{t_2 t_1 u_1 t_1 u_2 \dots t_1 u_r t_1 \mid u_i \in \{t_2 t_3, t_3 t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\}, \end{aligned}$$

da wir in einem Zyklus die Reihenfolge zwischen  $t_2$  und  $t_3$  beliebig wählen können.

Wenn die Markierungen und ihre Übergänge durch Schalten betrachtet werden, so kann ein Petri-Netz  $N = (S, T, F, V, m_0)$  auch als Automat  $\mathcal{A} = (R(N, m_0), T, m_0, \delta)$  aufgefasst werden, bei dem die von  $m_0$  erreichbaren Markierungen die Menge der Zustände bilden, die Eingaben den Transitionen entsprechen, die Anfangsmarkierung  $m_0$  als Initialzustand fungiert und die Überföhrungsfunktion  $\delta$  durch  $\delta(m, t) = m'$  mit  $m[t > m'$  definiert ist. Man beachte aber, dass es sich dabei um einen unendlichen Automaten handelt, wenn die Menge  $R(N, m_0)$  unendlich ist.

Der Automat kann durch einen Graphen beschrieben werden, der als Erreichbarkeitsgraph bezeichnet wird und wie folgt definiert ist.

**Definition 3.7** Es sei  $N = (S, T; F, V, m_0)$  ein Petri-Netz. Der Erreichbarkeitsgraph  $EG(N)$  von  $N$  ist der gerichtete kantenbeschriftete Graph  $EG(N) = (R(N, m_0), B(N))$ , wobei  $B(N)$  durch

$$B(N) = \{[m, t, m'] \mid m, m' \in R(N, m_0), t \in T, m[t > m']\}$$

definiert ist.

Üblicherweise wird die Kante eines Graphen von  $x$  nach  $y$  als Paar  $(x, y)$  gegeben. Wir benutzen hier Tripel  $[x, t, y]$ , weil wir neben Ausgangs- und Endknoten der Kante auch noch die Transition  $t$  vermerken wollen, die den Übergang zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  verursacht. In graphischen Repräsentationen werden wir einfach ein  $t$  an die Kante schreiben.

**Beispiel 3.3** (Fortsetzung) Wir betrachten erneut das Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1. Da die Erreichbarkeitsmenge  $R(N, m_0)$  oben als unendlich nachgewiesen wurde, ist der Erreichbarkeitsgraph von  $N_5$  unendlich. Wir geben in Abbildung 3.2 einen Teil von  $EG(N_5)$  an.

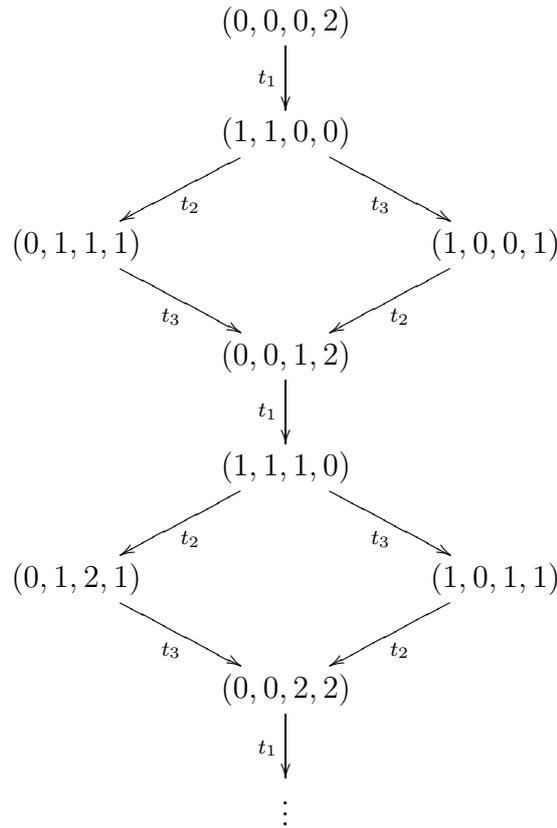


Abbildung 3.2: Teil des Erreichbarkeitsgraphen vom Petri-Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1

Wir modifizieren das Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1 zum Netz  $N'_5$ , indem wir den Knoten  $s_3$  und die Kante von  $t_2$  nach  $s_3$  streichen. Der Erreichbarkeitsgraph von  $N'_5$  ist in Abbildung 3.3 gegeben.

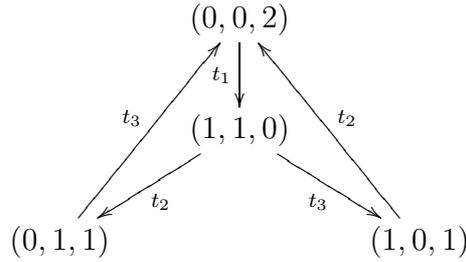


Abbildung 3.3: Erreichbarkeitsgraphen des Petri-Netzes  $N'_5$

Offensichtlich existiert in einem Petri-Netz  $N$  mit einem unendlichen Erreichbarkeitsgraphen mindestens eine Stelle  $s$  so, dass die Anzahl der Marken auf  $s$  beliebig groß wird. Dies ist aber in der praktischen Anwendung hinderlich, denn intuitiv bedeutet dies, dass sich an einem Ort sich unendlich viele Objekte befinden können. Um dies zu verhindern, schränkt man die Menge der zugelassenen Markierungen ein. Man fordert Höchstgrenzen für die Anzahl der Marken auf einer Stelle.

**Definition 3.8** Ein Petri-Netz mit Kapazitätsbeschränkung ist durch ein Sechstupel  $N = (S, T, F, V, K, m_0)$  gegeben, wobei  $(S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz und  $K : S \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  eine Funktion ist, die jeder Stelle eine natürliche Zahl oder den Wert  $\infty$  zuordnet.

Die Funktion  $K$  gibt an, dass auf der Stelle  $s \in S$  maximal  $K(s)$  Marken liegen dürfen. Entsprechend der Definition kann die Schranke für die Marken auch unendlich sein. Ein Petri-Netz kann also als ein Petri-Netz mit Kapazitätsbeschränkung  $K$ , für die  $K(s) = \infty$  für alle  $s \in S$  gilt. Bei der graphischen Darstellung von Petri-Netzen mit Kapazitätsbeschränkung geben wir nur bei den Stellen  $s$  den Wert  $K(s)$  an, wenn dieser nicht unendlich ist.

**Beispiel 3.9** Wir modifizieren das Petri-Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1 zum Petri-Netz  $N''_5$  mit Kapazitätsbeschränkung, indem wir zusätzlich  $K$  durch  $K(s_1) = K(s_2) = K(s_4) = \infty$  und  $K(s_3) = 1$  festlegen. Obwohl wir nur eine Stelle hinsichtlich ihrer Kapazität beschränken, erhalten in diesem Fall auch einen endlichen Erreichbarkeitsgraphen, der in Abbildung 3.4 angegeben ist. Dies folgt natürlich daraus, dass die beschränkte Stelle  $s_3$  die einzige ist, die durch Schalten von Transitionen in  $N_5$  beliebig große Markenzahl erreichen kann. Wir weisen aber darauf hin, dass die Kapazitätsbeschränkung zu einem anderen Erreichbarkeitsgraphen führt als das Streichen von  $s_3$  (siehe Abbildung 3.3).

Wir wollen nun eine Beschreibung des Schaltens von Transitionen mit algebraischen Mitteln geben. Dazu definieren noch für zwei  $k$ -dimensionale Vektoren  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  über  $\mathbf{N}$  Vergleichsrelationen durch

$$\begin{aligned} x \leq y & \text{ genau dann, wenn } x_i \leq y_i \text{ für } 1 \leq i \leq k, \\ x < y & \text{ genau dann, wenn } x \leq y \text{ und } x \neq y. \end{aligned}$$

Demnach gilt  $x < y$  genau dann, wenn  $x_i \leq y_i$  für  $1 \leq i \leq k$  gilt und ein  $j$  ein  $x_j < y_j$  existiert.

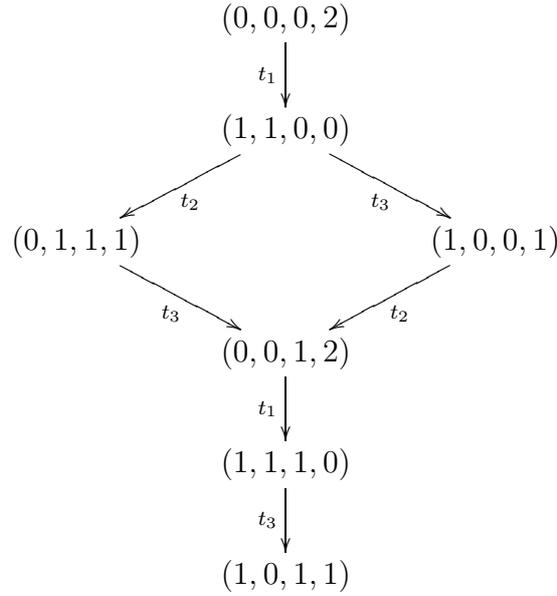


Abbildung 3.4: Erreichbarkeitsgraphen vom Netz  $N_5''$

**Definition 3.10** Für ein Petri-Netz  $N = (S, T, F, V, m_0)$  und eine Transition  $t$  definieren wir die Funktionen  $t^- : S \rightarrow \mathbf{N}_0$ ,  $t^+ : S \rightarrow \mathbf{N}_0$  und  $\Delta t : S \rightarrow \mathbf{Z}$  durch

$$\begin{aligned}
 t^-(s) &= \begin{cases} V(s, t) & \text{für } s \in \bullet t \\ 0 & \text{für } s \in S \setminus \bullet t \end{cases} , \\
 t^+(s) &= \begin{cases} V(t, s) & \text{für } s \in t \bullet \\ 0 & \text{für } s \in S \setminus t \bullet \end{cases} , \\
 \Delta t(s) &= t^+(s) - t^-(s) \quad \text{für } s \in S.
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $t^-$  gibt an, wieviel Marken den Stellen beim Schalten von  $t$  entzogen werden,  $t^+$  gibt an, wieviel Marken den Stellen beim Schalten von  $t$  hinzugefügt werden, und  $\Delta t$  gibt für jede Stelle die Änderung der Markenzahl beim Schalten von  $t$  an. Die folgenden Aussagen sind aufgrund der Definitionen offensichtlich.

**Lemma 3.11** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $t \in T$  und  $m$  und  $m'$  zwei Markierungen von  $N$ .

- i) Die Transition  $t$  ist genau aktiviert bei  $m$ , wenn  $t^- \leq m$  gilt.
- ii) Es gilt genau dann  $m[t > m'$ , wenn  $t^- \leq m$  und  $m' = m + \Delta t$  gelten. □

**Lemma 3.12** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  Transitionen aus  $T$  und  $m, m'$  und  $m''$  Markierungen von  $N$ .

- i) Aus  $m[t_1 t_2 \dots t_n > m'$  folgt  $m' = m + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ .
- ii) Wenn  $t_1 t_2 \dots t_n$  eine Schaltfolge für  $m$  ist und  $m \leq m''$  gilt, so ist  $t_1 t_2 \dots t_n$  auch eine Schaltfolge für  $m''$ .

*Beweis.* i) kann einfach durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Transitionen bewiesen werden.

ii) Wenn  $t_1$  bei  $m$  aktiviert ist, d.h.  $t^- \leq m$ , so ist  $t_1$  wegen  $m \leq m''$  auch bei  $m''$  aktiviert. Damit können wir in beiden Fällen  $t_1$  schalten und erhalten  $m [t_1 > m + \Delta t_1$  und  $m'' [t_1 > m'' + \Delta t_1$ . Wegen  $m \leq m''$ , haben wir auch  $m + \Delta t_1 \leq m'' + \Delta t_1$ . Da  $t_2$  bei  $m + \Delta t_1$  aktiviert ist, ist  $t_2$  auch bei  $m'' + \Delta t_1$  aktiviert und kann in beiden Fällen geschaltet werden. Wir wenden diese Argument iterativ an und erhalten, dass  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sowohl bei  $m + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_{i-1}$  als auch bei  $m'' + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_{i-1}$  geschaltet werden kann. Damit ist  $t_1 t_2 \dots t_n$  auch Schaltfolge für  $m''$ .  $\square$

Falls  $q = t_1 t_2 \dots t_n$  eine Schaltfolge für  $m$  ist, so schreiben wir für das Ergebnis des Schaltens von  $q$  auch einfach  $m + \Delta q$  mit  $\Delta q = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ .

**Definition 3.13** *Es sei  $N = (\{s_1, s_2, \dots, s_r\}, \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz.*

i) *Die Inzidenzmatrix  $I(N)$  von  $N$  ist die  $(n, r)$ -Matrix, bei der für  $1 \leq i \leq n$  die  $i$ -te Zeile durch  $\Delta t_i$  gegeben ist.*

ii) *Für eine Wort  $q$  über der Menge der Transitionen definieren wir den Parikh-Vektor*

$$\pi(q) = (\#_{t_1}(q), \#_{t_2}(q), \dots, \#_{t_n}(q)),$$

wobei  $\#_t(q)$  die Anzahl des Vorkommens der Transition  $t$  in  $q$  ist.

Die Inzidenzmatrix und der Parikh-Vektor liefern eine einfache Möglichkeit zur Berechnung der Markierung  $m'$ , die durch Schalten einer Schaltfolge  $q$  aus einer Markierung  $m$  erreicht wird, denn es gilt

$$m' = m + \pi(q)I(N).$$

Dies ist wie folgt einzusehen. Für  $1 \leq i \leq n$  ist offensichtlich  $\pi(t_i)$  der Vektor, der in der  $i$ -ten Komponente eine 1 und ansonsten nur Nullen hat. Damit gilt liefert  $\pi(t_i)I(N)$  gerade die  $i$ -te Zeile von  $I(N)$ . Es gilt also  $\pi(t_i)I(N) = \Delta t_i$ . Außerdem ist offenbar

$$\pi(q) = \sum_{i=1}^n \#_{t_i}(q) \pi(t_i).$$

Damit ergibt sich

$$\pi(q)I(N) = \left( \sum_{i=1}^n \#_{t_i}(q) \pi(t_i) \right) I(N) = \sum_{i=1}^n \#_{t_i}(q) \pi(t_i) I(N) = \sum_{i=1}^n \#_{t_i}(q) \Delta t_i = \Delta q,$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Kommutativität der Vektoraddition besteht. Folglich gilt  $m' = m + \Delta q = m + \pi(q)I(N)$ .

Schon bei ein einführenden Bemerkungen haben wir auf die besondere Rolle von Nebenläufigkeiten und Konflikten hingewiesen, da diese typisch für Petri-Netze und durch andere Systeme meist nicht modellierbar sind. Wir geben nun die formalen Definitionen.

Dazu erweitern wir zuerst die Funktion  $t^-$  auf Mengen  $U \subseteq T$  von Transitionen durch die Setzung

$$U^- = \sum_{t \in U} t^-.$$

**Definition 3.14** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $U \subseteq T$  eine Menge von Transitionen und  $m$  eine Markierung von  $S$ . Die Menge  $U$  heißt nebenläufig bei  $m$ , wenn  $U^- \leq m$  gilt.

Nebenläufigkeit einer Menge  $U$  bedeutet daher, dass alle Transition von  $U$  gleichzeitig schalten können, denn auf jeder Stelle liegen genügend Marken dafür. Wie wir aber schon im ersten Kapitel bemerkt haben, muss kein gleichzeitiges Schalten erfolgen, die Transitionen aus  $U$  können auch in einer beliebigen Reihenfolge nacheinander schalten oder einige gleichzeitig und einige nacheinander. Damit haben wir auch die folgende Aussage.

**Folgerung 3.15** Es sei  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz. Die Menge  $U \subseteq T$  von Transitionen sei nebenläufig bei der Markierung  $m$  von  $S$ .

i) Wenn  $t \in U$  ist, so ist  $t$  bei  $m$  aktiviert.

ii) Wenn in dem Wort  $q \in U^*$  jede Transition aus  $U$  höchstens einmal vorkommt, dann ist  $q$  eine Schaltfolge für  $m$ .  $\square$

Die Umkehrung von Folgerung 3.15 ii) gilt im Allgemeinen nicht, wie anhand des Netzes



zu sehen ist, denn  $t_1$  und  $t_2$  können in beliebiger Reihenfolge schalten und die Anfangsmarkierung  $m_0$  bleibt dabei stets erhalten, aber  $U = \{t_1, t_2\}$  ist wegen  $U^- = 2 > 1 = m_0$  nicht nebenläufig. Die Ursache liegt in den Schlingen, wie der folgende Satz besagt.

**Satz 3.16** Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein schlingenfreies Petri-Netz,  $U \subseteq T$  eine Menge von Transitionen und  $m$  eine Markierung von  $S$ . Wenn die Transitionen aus  $U$  bei  $m$  in beliebiger Reihenfolge geschaltet werden können (d.h. jedes Wort  $q \in U^*$ , in dem jede Transition aus  $U$  genau einmal vorkommt, ist Schaltfolge bei  $m$ ), dann ist  $U$  nebenläufig bei  $m$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $U$  nicht nebenläufig bei  $m$  ist. Dann existiert eine Stelle  $s$  mit  $U^-(s) > m(s)$ .  $t_1, t_2, \dots, t_n$  seien die Transitionen mit  $t^-(s) > 0$ . Dann gilt

$$U^-(s) = \sum_{i=1}^n t_i^-(s) > m(s).$$

Nach Voraussetzung kann die Folge  $t_1 t_2 \dots t_n$  geschaltet werden. Dies wäre aber nicht möglich, wenn  $t_i^+(s) = 0$  für  $1 \leq i \leq n$  ist, da auf  $s$  nicht genügend Marken zum Schalten aller Transitionen liegen. Folglich gilt  $t_i^+(s) > 0$  für ein  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Damit bilden aber  $s$  und  $t_i$  eine Schlinge im Widerspruch zur vorausgesetzten Schlingenfreiheit des Petri-Netzes.  $\square$

**Definition 3.17** Eine Menge  $U \subseteq T$  von Transitionen eines Netzes  $N = (S, T, F, V, m_0)$  heißt strukturell nebenläufig, wenn  $U$  bei jeder Markierung  $m$ , bei der alle  $t \in U$  aktiviert sind, nebenläufig ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die strukturelle Nebenläufigkeit (wirklich) eine strukturelle Eigenschaft des Netzes ist, d.h. nicht von den Markierungen sondern eigentlich nur von  $S$ ,  $T$  und  $F$  abhängt.

**Satz 3.18** *Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz und  $U \subseteq T$  eine Menge von Transitionen. die Menge  $U$  ist genau dann strukturell nebenläufig, wenn die Vorplatzmengen der Transitionen aus  $U$  paarweise disjunkt sind.*

*Beweis.* Wenn die Vorbereiche  $\bullet t$  für die Transitionen  $t \in U$  paarweise disjunkt sind, so gibt es zu jeder Stelle  $s \in S$  höchstens eine Transition  $t_s \in U$  mit  $t_s^-(s) > 0$ . Folglich gilt für jede Markierung  $m$ , bei der alle  $t \in U$  aktiviert sind die Beziehung

$$U^-(s) = \left\{ \begin{array}{ll} t_p^-(s) & \text{falls } U^-(s) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \leq m(s).$$

Dies besagt aber gerade, dass  $U$  nebenläufig bei  $m$  ist.

Für jede Stelle  $s \in S$  definieren wir

$$m(s) = \max\{t^-(s) \mid t \in U\}.$$

Offensichtlich ist jede Transition  $t \in U$  dann aktiviert, da  $m(s) \geq t^-(s)$  für alle  $t \in U$  gilt. Falls es eine Stelle  $s'$  und zwei Transitionen  $t'$  und  $t''$  mit  $s' \in \bullet t' \cap \bullet t''$  gibt, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $m(s') = (t')^-(s')$  gilt. Außerdem erhalten wir

$$U^-(s') = \sum_{i=1}^n t_i^-(s') \geq (t')^-(s') + (t'')^-(s') = m(s') + (t'')^-(s') > m(s').$$

Damit ist gezeigt, dass  $U$  nicht nebenläufig bei  $m$  ist. □

Wir wenden uns nun den Konflikten zu.

**Definition 3.19** *Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $U \subseteq T$  eine Menge von Transitionen und  $m$  eine Markierung von  $S$ .*

*i) Die Menge  $U$  heißt konfliktbehaftet bei  $m$ , wenn alle Transitionen aus  $U$  aktiviert sind, aber  $U$  nicht nebenläufig bei  $m$  ist.*

*ii) Die Menge  $U$  heißt strukturell konfliktbehaftet, wenn es eine Markierung gibt, bei der  $U$  konfliktbehaftet ist.*

*iii) Das Netz  $N$  heißt (dynamisch) konfliktfrei, wenn jede Zweiermenge von Transitionen bei jeder erreichbaren Markierung  $m \in R(N, m_0)$  nicht konfliktbehaftet ist, und es heißt strukturell konfliktfrei (oder statisch konfliktfrei), wenn keine Zweiermenge von Transitionen strukturell konfliktbehaftet ist.*

Wir geben einige einfache Folgerungen aus den Definitionen.

**Folgerung 3.20** *i) Wenn das Petri-Netz  $N$  strukturell konfliktfrei ist, dann ist es konfliktfrei und jede Teilmenge  $U \subseteq T$  von Transitionen ist strukturell nebenläufig.*

*ii) Das Petri-Netz ist genau dann strukturell konfliktfrei, wenn die Vorplatzmengen der Transitionen aus  $T$  paarweise disjunkt sind.*

*iii) Wenn eine Transition  $t$  eines konfliktfreien Netzes aktiviert ist, ist  $t$  die einzige Transition, durch die eine Markierung erreicht werden kann, bei der  $t$  nicht aktiviert ist.*

*Beweis.* Die beiden ersten Aussagen folgen aus den Definitionen und Satz 3.18.

iii) Es sei  $t'$  eine von  $t$  verschiedene Transition. Wenn  $t'$  auch aktiviert ist, so ist die Zweiermenge  $\{t, t'\}$  nebenläufig. Damit ist  $t't$  eine Schaltfolge. Folglich ist  $t$  nach dem Schalten von  $t'$  noch aktiviert.  $\square$

**Folgerung 3.21** *Wenn das Petri-Netz strukturell konfliktfrei ist, so ist es ein erweitertes Free-Choice-Netz.*

*Beweis.* Die Aussage folgt aus Lemma 2.12 und Definition 2.10 vi) sofort (da eine Implikation stets wahr ist, wenn ihre Voraussetzung nicht erfüllt ist).  $\square$

## 3.2 Beschränktheit und Erreichbarkeit

Wie haben oben schon bemerkt, dass es in der Praxis in der Regel unmöglich ist, dass auf einer Stelle beliebig viele Marken liegen können. Daher ist die folgende Definition sehr naheliegend, um beliebig viele Marken auf Stellen auszuschließen.

**Definition 3.22** *Es seien  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ein Petri-Netz,  $s \in S$  eine Stelle,  $m$  eine Markierung von  $S$  und  $k$  eine natürliche Zahl.*

i) *Die Stelle  $s$  heißt  $k$ -beschränkt bei  $m$ , wenn für jede von  $m$  erreichbare Markierung  $m' \in R(N, m)$  gilt, dass  $m'(s) \leq k$  ist.*

ii) *Wir nennen  $s$  beschränkt bei  $m$ , wenn es ein  $k$  gibt, so dass  $s$   $k$ -beschränkt bei  $m$  ist.*

iii) *Das Netz  $N$  heißt beschränkt bei  $m$ , wenn jede Stelle  $s \in S$  beschränkt bei  $m$  ist.*

Wir lassen den Zusatz „bei  $m$ “ fort, wenn  $m = m_0$  gilt.

Da  $S$  eine endliche Menge ist, können wir durch eine maximale Wahl von  $k$  erreichen, dass bei einem (bei  $m$ ) beschränkten Netz jede Stelle in  $S$  höchstens  $k$  Marken trägt. Wir sagen dann auch, dass  $N$   $k$ -beschränkt ist. Falls  $k = 1$  ist, wird das Netz auch *sicher* genannt.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Beschränktheit eines Petri-Netzes und Petri-Netze mit Kapazitätsbeschränkung verschiedene Konzepte sind. Bei der Kapazitätsbeschränkung wird das Schalten von Transitionen verboten, wenn die Anzahl der Marken die Kapazitätsschranke übersteigen würde. Bei beschränkten Netzen darf eine gewisse Kapazität nie überschritten werden; ein Schalten wird aber nicht untersagt, verhindert aber die Beschränktheit.

Das Netz  $N_5$  aus Abbildung 3.1 ist nicht beschränkt, denn für jedes  $i \in \mathbf{N}_0$  ist die Markierung  $(0, 0, i, 2)$  von  $m_0$  aus erreichbar. Dagegen ist das Netz  $N'_5$ , das aus  $N_5$  durch Streichen von  $s_3$  und  $(t_2, s_3)$  entsteht, ein beschränktes Petri-Netz, denn seine Erreichbarkeitsmenge besteht nur aus 4 Markierungen (siehe Abbildung 3.3), bei denen jede Komponente  $\leq 2$  ist. Damit ist  $N'_5$  sogar 2-beschränkt.

Aus den Definitionen ergibt sich sofort die folgende Aussage.

**Satz 3.23** *Ein Petri-Netz  $N = (S, T, F, V, m_0)$  ist genau dann beschränkt, wenn seine Erreichbarkeitsmenge  $R(N, m_0)$  endlich ist.*  $\square$



# Literaturverzeichnis

- [1] B. BAUMGARTEN, *Petri-Netze. Grundlagen und Anwendungen.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990.
- [2] M. JANTZEN, The large marking problem. *Petri Net Newsletter* **14** (1983) 24–25.
- [3] S. R. KOSARAJU, Decidability of reachability in vector addition systems. *Proc. 14th Ann. ACM STOC* (1982) 267–281.
- [4] E. W. MAYR, An algorithm for the general petri net reachability problem. *SIAM J. Comput.* **13** (1984) 441–460.
- [5] H. MÜLLER, The reachability problem for VAS. In: *Lecture Notes in Computer Science* **188** (1984) 376–391.
- [6] W. REISIG, *Petrinetze. Eine Einführung.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [7] A. SCHRIJVER, *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley, 1986.
- [8] P. H. STARKE, *Petri-Netze.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
- [9] P. H. STARKE, *Analyse von Petri-Netz-Modellen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1990.
- [10] J. WEHLER, *Petri Nets.* Vorlesungsskript, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1999.