Einige Lemmata I

Lemma:
Für Sprachfamilien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1', \mathcal{L}_2'$ mit $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_1'$ und $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_2'$ gilt $spl(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \subseteq spl(\mathcal{L}_1', \mathcal{L}_2')$.

Lemma:
Falls $\mathcal{L}_1$ unter Konkatenation mit Symbolen abgeschlossen ist, so gilt $\mathcal{L}_1 \subseteq spl(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ für alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_2$.

Lemma:
Falls $\mathcal{L}$ unter Konkatenation, Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Mengen abgeschlossen ist, so gilt $spl(\mathcal{L}, \mathcal{L}(REG)) \subseteq \mathcal{L}$.

Einige Lemmata II

Lemma:
Falls $\mathcal{L}$ unter Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Mengen abgeschlossen ist, so gilt $spl(\mathcal{L}(REG, \mathcal{L})) \subseteq \mathcal{L}$.

Lemma:
Für jede rekursiv-aufzählbare Sprache L gibt es kontextfreie Sprachen L_1 und L_2 derart, dass $L = \{u \mid uv \in L_1 \text{ für ein } v \in L_2\}$ gilt.

Lemma:
Für jede rekursiv-aufzählbare Sprache $L \subset V^*$ gibt es eine kontextabhängige Sprache L' und Buchstaben c_1 und c_2, die nicht in V liegen, derart, dass $L' \subseteq L\{c_1\}\{c_2\}^*$ gilt und es für jedes $w \in L$ eine Zahl $i \geq 1$ derart gibt, dass $wc_1c_2^i \in L'$ ist.

Splicing-Systeme

Definition:
Ein Splicing-System ist ein Tripel $G = (V, R, A)$, wobei
– V ein Alphabet ist,
– R eine Teilmenge von $V^*\#V^*\$V^*\#V^*$ ist, und
– A eine Teilmenge von V^* ist.

Definition:
Die von einem Splicing-System G erzeugte Sprache $L(G)$ ist durch die folgenden Setzungen definiert:
– $spl^0(G) = A$ und $spl^{i+1}(G) = spl(spl^i(G), R)) \cup spl^i(G)$ für $i \geq 0$,
– $L(G) = \cup_{i \geq 0} spl^i(G)$.

Beispiel:
$G = (\{a, b\}, \{a\#b\$a\#b\}, \{(a^n b^n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1\})$
$L(G) = \{a^{r_1} b^{s_1} a^{r_2} b^{s_2} \ldots a^{r_m} b^{s_m} \mid m \geq 1,\ r_i \geq 1,\ s_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq m\}$

Erweiterte Splicing-Systeme

Definition:
i) Ein erweitertes Splicing-System ist ein Quadrupel $G = (V, T, R, A)$, wobei
– $H = (V, R, A)$ ein Splicing-System ist und
– T eine Teilmenge von V ist.
ii) Die von einem erweiterten Splicing-System G erzeugte Sprache ist durch $L(G) = L(H) \cap T^*$ definiert.

Beispiel:
$G = (\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{\#c\$c\#a\}, \{c^m a^n b^n \mid n \geq 1\}$
$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Definition: Für zwei Sprachfamilien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ definieren wir $Spl(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ $(ESpl(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2))$ als die Menge aller Sprachen $L(G)$, die durch Splicing-Systeme $G = (V, R, A)$ $(G = (V, T, R, A))$ mit $A \in \mathcal{L}_1$ und $R \in \mathcal{L}_2$ erzeugt werden.

Die Erzeugungskraft von Splicing-Systemen

Satz:
Es gilt die folgende Tabelle, wobei im Schnittpunkt der mit X markierten Zeile und der mit Y markierten Spalte ein Z steht, falls $\mathcal{L}(Z) = Spl(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$ gilt, und Z_1/Z_2 steht, falls $\mathcal{L}(Z_1) \subset Spl(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) \subset \mathcal{L}(Z_2)$ gilt.

	FIN	REG	CF	CS	RE
FIN	FIN/REG	FIN/RE	FIN/RE	FIN/RE	FIN/RE
REG	REG	REG/RE	REG/RE	REG/RE	REG/RE
CF	CF	CF/RE	CF/RE	CF/RE	CF/RE
CS	CS/RE	CS/RE	CS/RE	CS/RE	CS/RE
RE	RE	RE	RE	RE	RE

Die Erzeugungskraft von erweiterten Splicing-Systemen

Satz:
Es gilt die folgende Tabelle, wobei im Schnittpunkt der mit X markierten Zeile und der mit Y markierten Spalte ein Z steht, falls $\mathcal{L}(Z) = ESpl(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$ gilt.

	FIN	REG	CF	CS	RE
FIN	REG	RE	RE	RE	RE
REG	REG	RE	RE	RE	RE
CF	CF	RE	RE	RE	RE
CS	RE	RE	RE	RE	RE
RE	RE	RE	RE	RE	RE

Einige Lemmata III

Lemma:
Für Sprachfamilien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ mit $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}'_1$ und $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}'_2$ gilt $spl(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \subseteq spl(\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2)$.

Lemma:
Falls $\mathcal{L}$ unter Konkatenation mit Symbolen abgeschlossen ist, so gilt $\mathcal{L} \subseteq ESpl(\mathcal{L}, \mathcal{L}(FIN))$.

Lemma:
$\mathcal{L}(REG) \subseteq ESpl(\mathcal{L}(FIN), \mathcal{L}(FIN))$.

Einige Lemmata IV

Lemma:
Falls $\mathcal{L}$ unter Vereinigung, Konkatenation, Kleene-Abschluss, Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Mengen abgeschlossen ist, so gilt $ESspl(\mathcal{L}, \mathcal{L}(FIN)) \subseteq \mathcal{L}$.

Lemma:
Für jede rekursiv-aufzählbare Sprache $L \subseteq T^*$ gibt es ein erweitertes Splicing-System $G = (V, T, A, R)$ mit einer endlichen Menge A und einer regulären Menge R von Splicing-Regeln derart, dass $L(G) = L$ gilt.

Lemma:
F"ur jedes erweiterte Splicing-System G ist die erzeugte Sprache $L(G)$ eine rekursiv-aufzählbare Sprache.