# Logik

## Übungsblatt 9
## (für die 50. Kalenderwoche)

*zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow*
*im Wintersemester 2010/2011*

Magdeburg, 7. Dezember 2010

1. Es sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Geben Sie die Definition der Begriffe
   - Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Belegung bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Terms bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung $\alpha$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung $\alpha$.

2. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} \tau(c) &= 2, & \tau(f) &= F\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) &= \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) &= R_< = \{(n,m) \mid n < m\} \end{aligned}$$

   und die Belegung $\alpha$ bez. $I$ mit $\alpha(x) = 2$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

   a) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   b) $A = \forall x(r_1(f(c)) \vee r_2(x, f(x)))$,
   c) $A = \exists x(r_2(f(c), x) \wedge \neg r_2(x, f(x)))$,
   d) $A = (\exists x r_2(f(c), x) \wedge \exists x \neg r_2(x, f(x)))$.

3. Es sei $\mathcal{S}_1$ die Signatur, die durch $K = \emptyset$, $R_2 = \{r\}$, $R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$ gegeben ist. Ferner seien

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x r(x,x), \\ A_2 &= \forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x)), \\ A_3 &= \forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z)). \end{aligned}$$

   Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

   a) $\{A_1, A_2, A_3\}$,
   b) $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$,
   c) $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$,
   d) $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$.

4. Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Tautologien sind, falls $A$ und $B$ beliebige prädikatenlogische Ausdrücke sind.

   a) $(\forall x A \to \exists x A)$
   b) $(\exists x A \to \forall x A)$
   c) $(\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B))$
   d) $(\forall x(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B))$
   e) $(\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B))$
   f) $(\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B))$

5. Man beweise, dass weder $\forall x \exists y r(x,y)$ eine Folgerung von $\exists x \forall y r(x,y)$ ist, noch umgekehrt.