Ausdrücke der Modallogik

Definition:
Die Menge $mausd$ der modalen aussagenlogischen Ausdrücke wird induktiv als Menge von Wörtern über einer Menge von Variablen aus var und den Symbolen $($, $)$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\diamond$, $\Box$ wie folgt definiert:

1. Jede Variable $p \in var$ gehört zu $mausd$.

2. Sind A und B Wörter aus $mausd$, so gehören auch die Wörter

$$\neg A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B),\ \diamond A,\ \Box A$$

   zu $mausd$.

3. Ein Wort gehört nur dann zu $mausd$, wenn dies aufgrund endlich oftmaliger Anwendung von 1. und 2. der Fall ist.

Rahmen, Situationen und Belegung der Modallogik

Rahmen $\mathcal{R}$ – (gerichteter) Graph $\mathcal{R} = (S, R)$
Situation – Element aus S

Definition:
Es seien eine Menge var von Variablen und ein Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$ gegeben.
Eine Belegung in der modalen Logik α der Variablen aus var ist eine Funktion $\alpha : S \times var \to \{0, 1\}$, die jeder Situation und jeder Variablen einen Wahrheitswert aus $\{0, 1\}$ zuordnet.

Wert in der Modallogik

Definition:
Es seien ein Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$ und eine Belegung α gegeben.
Den Wert $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A)$ eines Ausdrucks $A \in mausd$ bez. eines Rahmens $\mathcal{R} = (S, R)$, einer Belegung α und einer Situation $s \in S$ definieren wir induktiv durch folgende Setzungen:

i) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(p) = \alpha_s(p)$ für eine Variable $p \in var$.
ii) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\neg A) = 0$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$.
iii) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \wedge B)) = 1$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 1$.
iv) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \vee B)) = 0$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 0$.
v) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \rightarrow B)) = 0$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$ und $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 0$.
vi) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \leftrightarrow B)) = 1$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B)$.
vii) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\diamond A) = 1$ gdw. $r \in S$ mit $(s, r) \in R$ und $w_\alpha^{\mathcal{R},r}(A) = 1$ existiert.
viii) $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\Box A) = 1$ gdw. $w_\alpha^{\mathcal{R},r}(A) = 1$ für alle $r \in S$ mit $(s, r) \in R$.

Semantische Äquivalenz, Tautologie und Erfüllbarkeit in der modalen Logik

Definition:

- Zwei Ausdrücke A und B aus $mausd$ heißen semantisch äquivalent, wenn für jeden Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$, jede Belegung α und jede Situation $s \in S$ die Beziehung $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B)$ gilt.

- Ein Ausdruck A aus $mausd$ heißt Tautologie, wenn für jeden Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$, jede Belegung α und jede Situation $s \in S$ die Beziehung $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$ erfüllt ist.

- Ein Ausdruck A aus $mausd$ heißt erüllbar, wenn es einen Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$, eine Belegung α und eine Situation $s \in S$ so gibt, dass $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$ erfüllt ist.

Modallogische Tautologien

Satz:

i) Für modallogische Ausdrücke A und B aus $mausd$ sind die folgenden Ausdrücke Tautologien:

– $(\diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A)$,

– $(\Box A \leftrightarrow \neg \diamond \neg A)$,

– $(\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B))$,

– $(\diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\diamond A \vee \diamond B))$,

– $(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$.

ii) Wenn A eine modallogische Tautologie ist, so ist auch $\Box A$ eine modallogische Tautologie.

Erfüllbarkeitsproblem der modalen Logik

Satz:
Das Erfüllbarkeitsproblem der modalen Aussagenlogik

$Gegeben$: Ausdruck $u \in mausd$ der modalen Aussagenlogik
$Frage$: Ist u erfüllbar?

ist entscheidbar.