Logik-Programme

Definition:

Eine Tatsachenklausel ist eine einelementige positive Klausel, d.h. sie hat die Form $\{P\}$.

Eine Prozedurklausel ist eine Klausel der Form $\{P, \neg Q_1, \neg Q_2, \ldots, \neg Q_k\}$ mit $k \geq 1$.
P hei+t Prozedurkopf, und $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ bilden den Prozedurkörper.

Ein Logik-Programm ist eine endliche Menge von Tatsachen- und Prozedurklauseln.

Eine Zielklausel ist eine Klausel der Form $\{\neg Q_1, \neg Q_2, \ldots, \neg Q_k\}$ mit $k \geq 1$.

Konfigurationen und ihre Übergänge

Definition: Es sei F ein Logik-Programm.

i) Eine Konfiguration ist ein Paar (G, sub), wobei G eine Zielklausel und sub eine Substitution ist.

ii) Wir sagen, dass die Konfiguration (G, sub) bez. F in die Konfiguration (G', sub') überführt wird (und schreiben $(G, sub) \vdash_F (G', sub')$), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

— $G = \{\neg Q_1, \neg Q_2, \ldots, \neg Q_k\}$

— es gibt in F eine Klausel $K = \{P, \neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_n\}$, $n \geq 0$, und ein i, $1 \leq i \leq n$, so dass B (nach einigen Umbenennungen) mit Q_i unifizierbar ist,

— $G' = s(\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_{i-1}, \neg A_1, \ldots, \neg A_n, \neg Q_{i+1}, \ldots, \neg Q_k\}$, wobei s der allgemeinste Unifikator von B und Q_i ist,

— $sub' = sub \circ s$.

Berechnungen

Definition:

Es seien F ein Logik-Programm und $G = \{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_k\}$ eine Zielklausel.

i) Eine Berechnung von F bei Eingabe von G ist eine Folge der Form

$$(G, id) \vdash_F (G_1, sub_1) \vdash (G_2, sub_2) \vdash_F \ldots \vdash_F (G_n, sub_n) \vdash_F \ldots \; .$$

ii) Falls eine Rechnung endlich ist und für das letzte Glied (G_n, sub) der Folge $G_n = \emptyset$ gilt, so heißt die Berechnung erfolgreich und $sub(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_k)$ ist das Ergebnis der Rechnung.

n ist die Länge der Berechnung.

Korrektheit und Vollständigkeit

Satz:
Seien F ein Logik-Programm und G eine Zielklausel.
Falls es eine erfolgreiche Rechnung von F bei Eingabe von G gibt, so ist jede Grundinstanz des Rechenergebnisses eine Folgerung von F.

Satz:
Seien F ein Logik-Programm und $G = \{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_k\}$ eine Zielklausel.
Falls jede Grundinstanz von $(Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_k)$eine Folgerung von F ist, so gibt es eine erfolgreiche Rechnung von F bei Eingabe von G mit dem Ergebnis $sub(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_k)$, und für jede Grundinstanz $sub'(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_k)$ gibt es eine Substitution s mit

$$sub'(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_k) = s(sub(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_k)) \,.$$

Vertauschungslemma I

Seien

$$C = \{\neg C_1, \neg C_2, \ldots, \neg C_r\} \text{ und } E = \{\neg E_1, \neg E_2, \ldots, \neg E_s\}$$

mit $r \geq 0$ und $s \geq 0$ und eine Resolution

$$\begin{array}{lll}
\{\neg A_1, \neg A_2, \ldots \neg A_n\} & & \{B\} \cup C \\
\qquad\qquad\downarrow & \swarrow & \\
sub_1(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{i-1}, C, \neg A_{i+1}, \ldots \neg A_n\}) & & \{D\} \cup E \\
\qquad\qquad\qquad\downarrow & \swarrow & \\
sub_2(sub_1(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{i-1}, C, \neg A_{i+1}, \ldots \neg A_{j-1}, E, \neg A_{j+1}, \ldots \neg A_n\})) & &
\end{array}$$

gegeben.

Vertauschungslemma II

Dann gibt es auch die Resolution

$$
\begin{array}{lll}
\{\neg A_1, \neg A_2, \ldots \neg A_n\} & & \{D\} \cup E \\
\quad\quad\downarrow & \swarrow & \\
sub_1(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{j-1}, E, \neg A_{j+1}, \ldots \neg A_n\}) & & \{B\} \cup C \\
\quad\quad\downarrow & \swarrow & \\
\multicolumn{3}{l}{sub_2(sub_1(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{i-1}, C, \neg A_{i+1}, \ldots \neg A_{j-1}, E, \neg A_{j+1}, \ldots \neg A_n\}))}
\end{array}
$$

wobei sogar bis auf Variablenbenennungen

$$sub_1' \circ sub_2' = sub_1 \circ sub_2$$

gilt.

Kanonische Berechnungen

Definition:

Seien F ein Logik-Programm und G eine Zielklausel.
Eine Rechnung von F bei Eingabe von G heißt kanonisch, falls in jeder Konfigurationsüberführung $(G', sub') \vdash_F (G'', sub'')$ der Rechnung nach dem ersten (d.h. dem am weitesten links stehenden) Literal von G' resolviert wird.

Satz:

Seien F ein Logik-Programm und G eine Zielklausel.
Falls es eine erfolgreiche Rechnung $\mathcal{R}$ von F bei Eingabe von G gibt, so gibt es auch eine erfolgreiche kanonische Rechnung $\mathcal{R}'$ von F bei Eingabe von G, so dass $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ die gleiche Länge haben und das gleiche Ergebnis liefern.

Vollständigkeit von Strategien

Definition: Eine Strategie heißt vollständig, wenn es für jedes Logik-Programm F und jede Zielklausel G, für die es eine erfolgreiche Berechnung von F bei Eingabe von G gibt, auch eine erfolgreiche Berechnung von F bei Eingabe von G mittels der Strategie gibt.

Satz: Die Breitensuche ist eine vollständige Strategie.

Satz: Die Tiefensuche ist keine vollständige Strategie.