

## Signatur einer prädikatenlogische Sprache

Das Alphabet einer prädikatenlogische Sprache (erster Stufe) besteht aus

- den logischen Funktoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\exists$  and  $\forall$
- den Klammersymbolen ( und ) und dem Komma ,
- einer (abzählbar unendlichen) Menge *var* von Variablen,
- einer (abzählbaren) Menge  $K$  von Konstantensymbolen,
- einer (abzählbaren) Menge  $R_n$  von  $n$ -stelligen Relationssymbolen für jedes  $n \geq 1$ , und
- einer (abzählbaren) Menge  $F_n$  von  $n$ -stelligen Funktionssymbolen für jedes  $n \geq 1$ .

Signatur  $\mathcal{S}$  einer prädikatenlogischen Sprache –  $(K, R_1, F_1, R_2, F_2, \dots)$

## Terme einer prädikatenlogische Sprache

### Definition:

Die Menge  $T(\mathcal{S})$  der Terme über der Signatur  $\mathcal{S}$  definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

- i) Jede Variable ist ein Term über  $\mathcal{S}$  (d.h.  $x \in T(\mathcal{S})$  für jede Variable  $x \in \text{var}$ ).
- ii) Jedes Konstantensymbol  $c \in K$  ist ein Term über  $\mathcal{S}$  (d.h.  $c \in T(\mathcal{S})$  für  $c \in K$ ).
- iii) Ist  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol, d.h.  $f \in F_n$ , und sind  $t_1, t_2, \dots, t_n$  Terme aus  $T(\mathcal{S})$ , so ist auch  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ein Term über  $\mathcal{S}$ .
- iv) Ein Wort liegt nur dann in  $T(\mathcal{S})$ , wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

## Ausdrücke einer prädikatenlogische Sprache

$x$  kommt im Wort  $w$  vollfrei vor, falls  $x$  in  $w$  vorkommt, aber weder  $\forall x$  noch  $\exists x$  Teilwörter von  $w$  sind.

**Definition:** Die Menge  $A(\mathcal{S})$  der prädikatenlogischen Ausdrücke über der Signatur  $\mathcal{S}$  definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

- i) Ist  $r \in R_n$  ein  $n$ -stelliges Relationssymbol und sind  $t_1, t_2, \dots, t_n$  Terme aus  $T(\mathcal{S})$ , so ist  $r(t_1, \dots, t_n)$  ein prädikatenlogischer Ausdruck über  $\mathcal{S}$ .
- ii) Sind  $A$  und  $B$  prädikatenlogische Ausdrücke aus  $A(\mathcal{S})$ , so sind auch  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  und  $(A \leftrightarrow B)$  prädikatenlogische Ausdrücke über  $\mathcal{S}$ .
- iii) Ist  $A$  ein prädikatenlogischer Ausdruck über  $\mathcal{S}$  und kommt die Variable  $x$  in  $A$  vollfrei vor, so sind auch  $\forall x A$  und  $\exists x A$  prädikatenlogische Ausdrücke über  $\mathcal{S}$ .
- iv) Ein Wort liegt nur dann in  $A(\mathcal{S})$ , wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

## Basisausdrücke

### Definition:

Ein Literal über der Signatur  $\mathcal{S}$  ist ein prädikatenlogischer Ausdruck der Form  $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$  oder  $\neg r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , wobei  $n \geq 1$  ist,  $r$  ein  $n$ -stelliges Relationssymbol ist und  $t_i \in T(\mathcal{S})$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt.

### Definition:

Für einen prädikatenlogischen Ausdruck  $A$  über der Signatur  $\mathcal{S}$  definieren wir die Menge  $B(A)$  der Basisausdrücke von  $A$  als die Menge aller Teilwörter  $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$  von  $A$ , bei denen  $n \geq 1$  gilt,  $r$  ein  $n$ -stelliges Relationssymbol ist und  $t_1, t_2, \dots, t_n$  Terme über  $\mathcal{S}$  sind.

## Prädikatenlogische Sprache – Beispiel 1

$\mathcal{S}_1$  mit  $K = \{c, d\}$ ,  $R_1 = \{r\}$ ,  $R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$

$$T(\mathcal{S}_1) = \{c, d\} \cup var$$

$r(c)$ ,  $r(d)$  und  $r(x)$  mit  $x \in var$  sind die Literale über  $\mathcal{S}_1$ ,

$$((r(x) \wedge r(y)) \vee r(c)) \in A(\mathcal{S}_1) \text{ mit } x, y \in var,$$

$$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow (r(x))) \in A(\mathcal{S}_1) \text{ mit } x, y \in var,$$

$$\forall z((r(x) \wedge r(z)) \vee r(c)) \in A(\mathcal{S}_1) \text{ mit } x \in var,$$

$$\exists x((r(x) \rightarrow r(y)) \leftrightarrow (r(c))) \in A(\mathcal{S}_1) \text{ mit } y \in var,$$

$$\forall z((\forall x r(x) \wedge \exists y r(y)) \vee r(z)) \in A(\mathcal{S}_1),$$

$$\forall y((\forall y r(y) \wedge \exists z r(z)) \vee r(z)) \notin A(\mathcal{S}_1),$$

$$\forall r r(c) \notin A(\mathcal{S}_1)$$

## Prädikatenlogische Sprache – Beispiele 2 und 3

$\mathcal{S}_2$  mit  $R_2 = \{r\}$ ,  $F_1 = \{f\}$ ,  $R_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$

$$T(\mathcal{S}_2) = \{ \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ mal}} \mid x \in \text{var}, n \geq 0 \}$$

$$r(\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ mal}}, \underbrace{f(f(\dots f(y)\dots))}_{m \text{ mal}}) \in A(\mathcal{S}), x, y \in \text{var}, n, m \in \mathbf{N}_0,$$

$$B_1 = \forall x r(x, f(x)) \in A(\mathcal{S}_2),$$

$$B_2 = \forall x \neg r(x, x) \in A(\mathcal{S}_2),$$

$$B_3 = \forall x \forall y \forall z ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \rightarrow r(x, z)) \in A(\mathcal{S}_2),$$

$$\forall x f(f(x)) \notin A(\mathcal{S}_2)$$

$\mathcal{S}_3$  mit  $K = \{e\}$ ,  $F_1 = \{h\}$ ,  $R_1 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 2$

$$T(\mathcal{S}_3) = \{ \underbrace{h(h(\dots h(x)\dots))}_{n \text{ mal}} \mid n \geq 0, x \in \text{var} \text{ oder } x = e \}, \quad A(\mathcal{S}_3) = \emptyset$$

## Interpretation

### Definition:

Sei  $\mathcal{S}$  die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Unter einer Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$  verstehen wir ein Paar  $I = (U, \tau)$ , wobei  $U$  eine nichtleere Menge ist und  $\tau$  eine Abbildung ist, die

- jedem Konstantensymbol  $c \in K$  ein Element  $\tau(c) \in U$  zuordnet,
- jedem  $n$ -stelligen Funktionssymbol  $f \in F_n$  eine  $n$ -stellige Funktion  $\tau(f) : U^n \rightarrow U$  zuordnet, und
- jedem  $n$ -stelligen Relationssymbol  $r \in R_n$  eine  $n$ -stellige Relation  $\tau(r) \subseteq U^n$  zuordnet.

Unter einer Belegung  $\alpha$  bez. der Interpretation  $I$  verstehen wir eine Funktion, die jeder Variablen  $x$  ein Element  $\alpha(x) \in U$  zuordnet.

## Wert eines prädikatenlogischen Terms

$\mathcal{S}$  – Signatur einer prädikatischen Sprache,

$I = (U, \tau)$  – Interpretation von  $\mathcal{S}$ ,

$\alpha$  – Belegung bez.  $I$ .

### Definition:

Wir definieren den Wert  $w_\alpha^I(t) \in U$  für  $t \in T(\mathcal{S})$  induktiv durch:

- $w_\alpha^I(x) = \alpha(x)$  für eine Variable  $x$ .
- $w_\alpha^I(c) = \tau(c)$  für ein Konstantensymbol  $c$ .
- Ist  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol und haben für  $1 \leq i \leq n$  die Terme  $t_i$  die Werte  $w_\alpha^I(t_i)$ , so gilt

$$w_\alpha^I(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \tau(f)(w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \dots, w_\alpha^I(t_n)).$$



## Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks

$\mathcal{S}$  – Signatur,  $I = (U, \tau)$  – Interpretation von  $\mathcal{S}$ ,  $\alpha$  – Belegung bez.  $I$

**Definition:** Wir definieren den Wert  $w_\alpha^I(A) \in \{0, 1\}$  für  $A \in A(\mathcal{S})$  induktiv durch:

- Für  $r \in R_n$  und  $t_i \in T(\mathcal{S})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , setzen wir

$$w_\alpha^I(r(t_1, t_2, \dots, t_n)) = 1 \text{ genau dann, wenn } (w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \dots, w_\alpha^I(t_n)) \in \tau(r).$$

- Für  $A \in A(\mathcal{S})$  und  $B \in A(\mathcal{S})$  setzen wir

$$\begin{aligned} w_\alpha^I(\neg A) &= 1 \text{ genau dann, wenn } w_\alpha^I(A) = 0, \\ w_\alpha^I((A \wedge B)) &= 1 \text{ genau dann, wenn } w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 1, \\ w_\alpha^I((A \vee B)) &= 0 \text{ genau dann, wenn } w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 0, \\ w_\alpha^I((A \rightarrow B)) &= 0 \text{ genau dann, wenn } w_\alpha^I(A) = 1 \text{ und } w_\alpha^I(B) = 0, \\ w_\alpha^I((A \leftrightarrow B)) &= 1 \text{ genau dann, wenn } w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B). \end{aligned}$$

## Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks – Fortsetzung

- Für  $A \in A(\mathcal{S})$  und in  $A$  vollfrei vorkommendes  $x$  setzen wir
  - $w_{\alpha}^I(\forall x A) = 1$  genau dann, wenn für jedes  $d \in U$  die Beziehung  $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$  erfüllt ist,
  - $w_{\alpha}^I(\exists x A) = 1$  genau dann, wenn es ein  $d \in U$  mit  $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$  gibt.

Dabei definieren wir für eine Belegung  $\alpha$  bez.  $I = (U, \tau)$ , eine Variable  $x$  und ein  $d \in U$  die Belegung  $\alpha_{x,d}$  bez.  $I$  durch

$$\alpha_{x,d}(y) = \begin{cases} d & \text{für } y = x \\ \alpha(y) & \text{für } y \neq x \end{cases} \cdot$$

## Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 1

$\mathcal{S}_1$  mit  $K = \{c, d\}$ ,  $R_1 = \{r\}$ ,  $R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$

$I = (U, \tau)$  mit  $U = \mathbb{N}$ ,  $\tau(c) = 2$ ,  $\tau(d) = 3$ ,  $\tau(r) = \{n \mid n \text{ is gerade}\}$

$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))$

$\alpha$  mit  $\alpha(x) = 2$  und  $\alpha(y) = 4$

$\alpha'$  mit  $\alpha'(x) = 5$  und  $\alpha'(y) = 5$

Nr.	Ausdruck $A$	$w_\alpha^I(A)$	$w_{\alpha'}^I(A)$	Begründung
a)	$r(c)$	1	1	da 2 gerade ist
b)	$\neg r(y)$	0	1	da 4 gerade und 5 gerade ist
c)	$(r(c) \wedge \neg r(y))$	0	1	wegen a) und b)
d)	$r(x)$	1	0	da 2 gerade und 5 ungerade ist
e)	$A$	1	0	wegen c) und d)

$$w_\gamma^I(\exists x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))) = 1$$

$$w_\gamma^I(\forall x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))) = 0$$

## Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 2

$\mathcal{S}_1$  mit  $K = \{c, d\}$ ,  $R_1 = \{r\}$ ,  $R_2 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$

$J = (U, \tau)$  mit  $U = \mathbb{R}$ ,  $\tau(c) = -1$ ,  $\tau(d) = 2$ ,  $\tau(r) = \{n \mid n \geq 0\}$

$A = ((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))$

$\alpha$  mit  $\alpha(x) = \pi$  und  $\alpha(y) = -4$

$\alpha'$  mit  $\alpha'(x) = 3, 14$  und  $\alpha'(y) = 4$

Nr.	Ausdruck $A$	$w_\alpha^J(A)$	$w_{\alpha'}^J(A)$	Begründung
a')	$r(c)$	0	0	da $-1 < 0$
b')	$\neg r(y)$	1	0	da $-4 < 0$ und $4 \geq 0$
c')	$(r(c) \wedge \neg r(y))$	0	0	wegen a') und b')
d')	$r(x)$	1	1	da $\pi \geq 0$ und $3, 14 \geq 0$
e')	$A$	1	1	wegen c') und d')

$$w_\gamma^J(\forall x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))) = 1$$

$$w_\gamma^J(\exists x((r(c) \wedge \neg r(y)) \rightarrow r(x))) = 1$$

## Tautologie – Kontradiktion – Erfüllbarkeit

**Definition:** i) Ein Ausdruck  $A$  über der Signatur  $\mathcal{S}$  heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar) bez. einer Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$ , falls für jede Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  die Beziehung  $w_\alpha^I(A) = 1$  (bzw.  $w_\alpha^I(A) = 0$ ) gilt.  $A$  heißt erfüllbar bez.  $I$ , falls es eine Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  mit  $w_\alpha^I(A) = 1$  gibt.

ii) Sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Ausdrücken über  $\mathcal{S}$ . Eine Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$  heißt Modell für  $\mathcal{A}$ , falls jeder Ausdruck von  $\mathcal{A}$  eine Tautologie bez.  $I$  ist.

iii) Ein Ausdruck  $A$  über der Signatur  $\mathcal{S}$  heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar), falls  $A$  Tautologie (bzw. Kontradiktion) bez. jeder Interpretation von  $\mathcal{S}$  ist. Ein Ausdruck  $A$  über  $\mathcal{S}$  heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$  und eine Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  mit  $w_\alpha^I(A) = 1$  gibt.

## Semantische Äquivalenz 1

**Definition:** Zwei prädikatenlogische Ausdrücke  $A$  und  $B$  über der Signatur  $\mathcal{S}$  heißen semantisch äquivalent, falls für jede Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$  und jede Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  die Beziehung  $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B)$  gilt.

**Folgerung:** Zwei prädikatenlogische Ausdrücke  $A$  und  $B$  über der Signatur  $\mathcal{S}$  sind genau dann semantisch äquivalent, wenn  $(A \leftrightarrow B)$  eine Tautologie ist.

**Lemma:** Es seien  $A$  und  $B$  aussagenlogische Ausdrücke mit  $var(A) \cup var(B) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Ferner seien  $C_1, C_2, \dots, C_n$  prädikatenlogische Ausdrücke über einer Signatur  $\mathcal{S}$  und  $A'$  und  $B'$  die prädikatenlogische Ausdrücke, die aus  $A$  und  $B$  entstehen, indem man für  $1 \leq i \leq n$  jedes Vorkommen von  $p_i$  durch  $C_i$  ersetzt. Dann gelten folgende Aussagen.

- i) Ist  $A$  eine Tautologie, so ist auch  $A'$  eine Tautologie.
- ii) Aus  $A \equiv B$  folgt  $A' \equiv B'$ .

## Semantische Äquivalenz 2

**Lemma:** Sind  $A$  und  $B$  beliebige prädikatenlogische Ausdrücke, so gelten die folgenden semantischen Äquivalenzen:

- i)  $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$ ,
- ii)  $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$ ,
- iii)  $(\forall x A \wedge \forall x B) \equiv \forall x (A \wedge B)$ ,
- iv)  $(\exists x A \vee \exists x B) \equiv \exists x (A \vee B)$ ,
- v)  $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$ ,
- vi)  $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$ .

Kommt überdies  $x$  in  $B$  nicht vor, so gelten noch

- vii)  $(\forall x A \wedge B) \equiv \forall x (A \wedge B)$ ,
- viii)  $(\forall x A \vee B) \equiv \forall x (A \vee B)$ ,
- ix)  $(\exists x A \wedge B) \equiv \exists x (A \wedge B)$ ,
- x)  $(\exists x A \vee B) \equiv \exists x (A \vee B)$ .

## Substitutionen

Seien  $s$  ein Term über  $\mathcal{S}$ ,  $A$  ein prädikatenlogischer Ausdruck über  $\mathcal{S}$ ,  $x$  eine Variable und  $t$  ein Term über  $\mathcal{S}$ , der  $x$  nicht enthält.

$sub(s, x, t)$  und  $sub(A, x, t)$  entstehen aus  $s$  bzw.  $A$ , indem jedes freie Vorkommen von  $x$  in  $s$  bzw.  $A$  durch  $t$  ersetzt wird.

$\alpha$  sei eine Belegung bez. einer Interpretation  $I$  von  $\mathcal{S}$

$$\alpha_{x,t}(y) = \begin{cases} \alpha(y) & y \neq x \\ w_{\alpha}^I(t) & y = x \end{cases}$$

**Lemma:** i)  $w_{\alpha}^I(sub(s, x, t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(s)$   
ii)  $w_{\alpha}^I(sub(A, x, t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(A)$ .

**Lemma:** Sei  $A = QxB$  mit  $Q \in \{\forall, \exists\}$  ein prädikatenlogischer Ausdruck über einer Signatur  $\mathcal{S}$ . Ferner sei  $y$  eine Variable, die in  $A$  nicht vorkommt. Dann gilt

$$Qx B \equiv Qy sub(B, x, y).$$



## Pränexe Normalform

### Definition:

Wir sagen, dass ein prädikatenlogischer Ausdruck  $A$  in pränexer Normalform ist, wenn folgende Bedingungen gelten:

- $A = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_nA'$  für ein  $n \geq 0$ ,
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  für  $1 \leq i \leq n$ ,
- für  $1 \leq i \leq n$  ist  $x_i$  eine Variable und
- in  $A'$  kommen  $\forall$  und  $\exists$  nicht vor.

### Satz:

Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck  $A$  gibt es einen zu  $A$  semantisch äquivalenten prädikatenlogischen Ausdruck  $B$  in pränexer Normalform.

## Pränexe Normalform – Beispiel

$$((\neg\forall x r(x, y) \vee \exists x s(h(x))) \wedge \forall y \neg p(x, f(y)))$$

a)  $r(x, y)$ ,  $s(h(x))$  und  $\neg p(x, f(y))$  sind pränexe Normalformen.

b)  $\neg\forall x r(x, y)$  hat pränexe Normalform  $\exists x \neg r(x, y)$

$\exists x s(h(x))$  pränexe Normalform

$\forall y \neg p(x, g(y))$  pränexe Normalformen

$$\begin{aligned} \text{c) } (\neg\forall x r(x, y) \vee \exists x s(h(x))) &\equiv (\exists x \neg r(x, y) \vee \exists x s(h(x))) \\ &\equiv (\exists w \neg r(w, y) \vee \exists v s(h(v))) \\ &\equiv \exists w (\neg r(w, y) \vee \exists v s(h(v))) \\ &\equiv \exists w \exists v (\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \end{aligned}$$

## Pränexe Normalform – Beispiel – Fortsetzung

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & ((\neg\forall x r(x, y) \vee \exists x s(h(x))) \wedge \forall y \neg p(x, f(y))) \\ & \equiv (\exists w \exists v (\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \wedge \forall y \neg p(x, f(y))) \\ & \equiv (\exists w \exists v (\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x, f(z))) \\ & \equiv \exists w (\exists v (\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x, f(z))) \\ & \equiv \exists w \exists v ((\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \wedge \forall z \neg p(x, f(z))) \\ & \equiv \exists w \exists v \forall z ((\neg r(w, y) \vee s(h(v))) \wedge \neg p(x, f(z))) \end{aligned}$$

## Pränexe Normalform 2

$Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_nA'$  – pränexe Normalform

$A'$  entsteht aus Basisausdrücken mittels Anwendung der aussagenlogischen Verknüpfungen  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$A'$  entsteht aus einem aussagenlogischen Ausdruck  $B$ , indem jedes Vorkommen einer Variablen in  $B$  durch einen Basisausdruck  $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$  ersetzt wird.

$K_B$  – konjunktive Normalform zu  $B$  und  $K_{A'}$  – analog gebildeter Ausdruck

$$K_{A'} = (D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_r),$$

$$D_i = (D_{i,1} \vee D_{i,2} \vee \dots \vee D_{i,s_i}) \text{ für } 1 \leq i \leq r,$$

$$D_{i,j} = r(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \dots, t_{i,j,k_{i,j}}) \text{ oder } D_{i,j} = \neg r(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \dots, t_{i,j,k_{i,j}})$$

für  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s_i$  und gewisse  $s, s_i, k_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s_i$ .

$K_{A'}$  – "konjunktive" Normalform von  $A'$ .

# Skolemform – Definition 1

**Definition:**

Für einen prädikatenlogischen Ausdruck

$$A = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y G,$$

mit  $n \geq 0$  und pränexer Normalform  $G$  und ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol  $f$ , das in  $G$  nicht vorkommt, setzen wir

$$sk(A, f) = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n sub(G, y, f(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

## Skolemform – Beispiele

**Beispiel 1:**  $A = \forall x \exists y (\neg R(x, x) \vee R(y, y))$

Elimination von  $\exists y$

$n = 1$ ,  $f$  einstellig,

$$sk(A, f) = \forall x (\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))$$

**Beispiel 2:**  $B = \forall x \exists y \forall z \exists w (R(a, y) \wedge \neg S(f(x), w, z))$

a) Elimination von  $\exists y$

$n = 1$ ,  $g$  einstellig

$$sk(B, g) = \forall x \forall z \exists w (R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), w, z))$$

b) Elimination von  $\exists w$

$n = 2$ ,  $h$  zweistellig

$$sk(sk(B, g), h) = \forall x \forall z (R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), h(x, z), z))$$

## Skolemform – Definition 2

### Definition:

Für eine pränexe Normalform  $A$  definieren wir die (bis auf Bezeichnung der Funktionssymbole eindeutig bestimmte) Skolemform  $sk(A)$  als das Resultat des folgenden Algorithmus:

Solange  $A$  einen Existenzquantor enthält, setze  $A = sk(A, f)$  für ein nicht in  $A$  vorkommendes Funktionssymbol  $f$ .

$$sk(A) = sk(A, f) = \forall x(\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))$$

$$sk(B) = sk(sk(B, g), h) = \forall x\forall z(R(a, g(x)) \wedge \neg S(f(x), h(x, z), z))$$

## Skolemform – semantische Äquivalenz

$$A = \forall x \exists y (\neg R(x, x) \vee R(y, y))$$

$$\begin{aligned} A &\equiv \forall x (\neg R(x, x) \vee \exists y R(y, y)) \\ &\equiv (\forall x \neg R(x, x) \vee \exists y R(y, y)) \\ &\equiv (\neg \exists x R(x, x) \vee \exists y R(y, y)) \end{aligned}$$

$w_\alpha^I(A) = 0$  genau dann, wenn  $w_\alpha^I(\neg \exists x R(x, x)) = 0$  und  $w_\alpha^I(\exists y R(y, y)) = 0$

$w_\alpha^I(A) = 0$  genau dann, wenn  $w_\alpha^I(\exists x R(x, x)) = 1$  und  $w_\alpha^I(\exists y R(y, y)) = 0$

$w_\alpha^I(A) = 1$  für beliebige  $\alpha$  bez. beliebigem  $I$



## Skolemform – semantische Äquivalenz – Fortsetzung

$$A = \forall x \exists y (\neg R(x, x) \vee R(y, y))$$

$$sk(A) = \forall x (\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))$$

$J = (\mathbf{N}, \tau)$  – Interpretation mit  $\tau(f)(n) = n + 2$  und  $\tau(R) = \{(1, 1)\}$   
 $(1, 1) \in \tau(R)$  und  $(f(1), f(1)) = (3, 3) \notin \tau(R)$

$\alpha$  – Belegung bez.  $J$

$$w_{\alpha_{x,1}}^J(\neg R(x, x)) = 0 \text{ und } w_{\alpha_{x,1}}^J(R(f(x), f(x))) = 0$$

$$w_{\alpha_{x,1}}^J((\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))) = 0$$

$$w_{\alpha}^J(\forall x (\neg R(x, x) \vee R(f(x), f(x)))) = \underline{w_{\alpha}^J(sk(A)) = 0}$$

## Skolemform – Erfüllbarkeitsäquivalenz

### Lemma:

Seien  $A = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y G$  ein prädikatenlogischer Ausdruck mit  $n \geq 0$  und pränexer Normalform  $G$  und  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol, das in  $G$  nicht vorkommt. Dann ist  $A$  genau dann erfüllbar, wenn  $sk(A, f)$  erfüllbar ist.

### Satz:

Eine pränexe Normalform  $A$  ist genau dann erfüllbar, wenn ihre Skolemform  $sk(A)$  erfüllbar ist.

## Bereinigte Skolemform

### Lemma:

Sei  $A$  ein prädikatenlogischer Ausdruck, in dem die Variable  $x$  vollfrei vorkommt. Dann ist  $A$  genau dann erfüllbar, wenn  $\exists x A$  erfüllbar ist.

### Definition:

Ein prädikatenlogischer Ausdruck  $A$  hat bereinigte Skolemform, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $A = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A'$  für ein  $n \geq 0$ ,
- $A'$  enthält keine Existenz- und Allquantoren,
- in  $A'$  kommen nur die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vor.

### Satz:

Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck  $A$  gibt es einen prädikatenlogischen Ausdruck in bereinigter Skolemform, der genau dann erfüllbar ist, wenn  $A$  erfüllbar ist.