

## Vorbemerkungen

*if* ( $x > y$ )  $z = x$ ; *else*  $z = y$ ;

Wenn es blaue Tiger regnet, dann fressen alle Kirschbäume schwarze Tomaten.

$$q(1) = 1,$$

$$q(i) = q(i - 1) + 2i - 1 \text{ für } i \geq 2$$

Welchen Wert hat  $q(6)$ ?

24 ist durch 2 teilbar.

24 ist durch 3 teilbar.

24 ist durch 6 teilbar.

Wenn 24 durch 2 teilbar ist  
und 24 durch 3 teilbar ist,  
so ist 24 durch 6 teilbar.

---

## Literatur

J. DASSOW: Logik für Informatiker. B.G.Teubner, Wiesbaden, 2005.

M. KREUZER, ST. KÜHLING: Logik für Informatiker. Pearson Studium 2006.

U. SCHÖNING: Logik für Informatiker. Reihe Informatik, Bd. 56, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.

J. KELLY: Logik (im Klartext). Pearson Studium, München, 2003.

D. GABBAY: Elementary Logics: A Procedural Perspective. Prentice Hall Europe, 1998.

# Aussagen

Eine Aussage ist ein sprachliches oder gedankliches Gebilde, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zukommt.

**Prinzip der Zweiwertigkeit:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

**Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch:** Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Die Sonne kreist um die Erde.

Heute ist schönes Wetter.

$x$  ist eine Primzahl.

Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

# Wörter

Alphabet — nichtleere Menge

Buchstabe — Element eines Alphabets

Wort (über  $V$ ) — Folge von Buchstaben (aus  $V$ )

$V^*$  (bzw.  $V^+$ ) — Menge aller (nichtleeren) Wörter über  $V$

Produkt (Katenation) von Wörter — Hintereinanderschreiben von Wörtern

$v$  Teilwort von  $w$  —  $w = x_1vx_2$  für gewisse  $x_1, x_2 \in V^*$

$v$  Anfangsstück von  $w$  —  $w = vx$  für ein gewisses  $x \in V^*$

$\#_a(w)$  — Anzahl der Vorkommen des Buchstaben  $a$  im Wort  $w$

$|w| = \sum_{a \in V} \#_a(w)$  — Länge des Wortes  $w \in V^*$

## Aussagenlogischer Ausdruck - Definition

Alphabet  $V = \{ (, ), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup \underbrace{\{ p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \}}_{var}$

**Definition:** i) Jede Variable  $p_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , ist ein aussagenlogischer Ausdruck über  $V$ .

ii) Sind  $A$  und  $B$  aussagenlogische Ausdrücke über  $V$ , so sind auch

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

aussagenlogische Ausdrücke über  $V$ .

iii) Ein Wort über  $V$  ist nur dann ein aussagenlogischer Ausdruck über  $V$ , falls dies aufgrund endlich oftmaliger Anwendung von i) und ii) der Fall ist.

## Aussagenlogischer Ausdruck - Beispiele

a)  $\neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$  — ja

b)  $\neg\neg(p_1 \vee p_2)$  — ja

c)  $p_1 \rightarrow \neg p_2$  — nein

d)  $(\forall p_1)$  — nein

**Definition:** Ein aussagenlogischer Ausdruck heißt Literal, falls er die Form  $p_i$  oder  $\neg p_i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  hat.

## Aussagenlogischer Ausdruck - Charakterisierung

**Satz:** Ein Wort  $A$  ist genau dann ein aussagenlogischer Ausdruck über  $V$ , wenn es die folgenden fünf Bedingungen (gleichzeitig) erfüllt:

1. Das Wort  $A$  beginnt mit einer Variablen oder mit  $\neg$  oder mit  $($ .
2. Auf eine Variable oder  $)$  folgt in  $A$  das Symbol  $)$  oder ein Element aus  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ , oder die Variable bzw.  $)$  ist das letzte Symbol des Wortes.
3. Auf ein Element aus  $\{(\, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  folgt in  $A$  eine Variable oder  $\neg$  oder  $($ .
4.  $\#_{(}(A) = \#_{)}(A) = \#_{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}}(A)$ .
5. Für jede Stelle in  $A$ , an der  $($  steht, d.h.  $A = W(W'$ , gibt es ein Wort  $B$  mit folgenden Eigenschaften:
  - $A = W(BW''$ ,
  - für jedes echte Anfangsstück  $U$  von  $(B$  gilt  $\#_{(}(U) \neq \#_{)}(U)$ ,
  - $\#_{(}((B) = \#_{)}((B) = \#_{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}}((B)$ .

## Aussagenlogischer Ausdruck - Wertberechnung

**Definition.** Eine Belegung ist eine Funktion  $\alpha : var \rightarrow \{0, 1\}$

**Definition:** Der Wert  $w_\alpha(C)$  eines aussalogischen Ausdruck  $C$  unter der Belegung  $\alpha$  ist induktiv wie folgt definiert:

- Ist  $C = p_i$  für eine Variable  $p_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , so gilt  $w_\alpha(p_i) = \alpha(p_i)$ .
- Ist  $C = \neg A$ , so gilt  $w_\alpha(\neg A) = 0$  genau dann, wenn  $w_\alpha(A) = 1$  gilt.
- Ist  $C = (A \wedge B)$ , so gilt  $w_\alpha((A \wedge B)) = 1$  genau dann, wenn  $w_\alpha(A) = w_\alpha(B) = 1$  gilt.
- Ist  $C = (A \vee B)$ , so gilt  $w_\alpha((A \vee B)) = 0$  genau dann, wenn  $w_\alpha(A) = w_\alpha(B) = 0$  gilt.
- Ist  $C = (A \rightarrow B)$ , so gilt  $w_\alpha((A \rightarrow B)) = 0$  genau dann, wenn  $w_\alpha(A) = 1$  und  $w_\alpha(B) = 0$  gelten.
- Ist  $C = (A \leftrightarrow B)$ , so gilt  $w_\alpha((A \leftrightarrow B)) = 1$  genau dann, wenn  $w_\alpha(A) = w_\alpha(B)$  gilt.



## Boolesche Funktion

**Definition:** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Unter einer  $n$ -stelligen Booleschen Funktion  $f$  verstehen wir eine Funktion von  $\{0, 1\}^n$  in  $\{0, 1\}$ .

**Beispiel:**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

**Satz:** Für  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $2^{2^n}$  Boolesche Funktionen.

## Ausdruck versus Funktion I

**Definition:** Sei  $A$  ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  mit  $\text{var}(A) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Die von  $A$  induzierte  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f_{A,n}$  ist durch

$$f_{A,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_\alpha(A) \text{ mit } \alpha(p_i) = x_i \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

definiert.

$x_1$	$x_2$	$f_{(p_1 \wedge p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \vee p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \rightarrow p_2)}(\underline{x})$	$f_{(p_1 \leftrightarrow p_2)}(\underline{x})$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

## Ausdruck versus Funktion II

$$A = \neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$$

$$B = (p_2 \rightarrow p_3), \quad C = \neg B, \quad D = (p_1 \rightarrow C) \quad \text{und} \quad A = \neg D$$

$x_1 = \alpha(p_1)$	$x_2 = \alpha(p_2)$	$x_3 = \alpha(p_3)$	$w_\alpha(B)$	$w_\alpha(C)$	$w_\alpha(D)$	$w_\alpha(A)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

# Semantische Äquivalenz

**Definition:** Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  heißt semantisch äquivalent zum aussagenlogischen Ausdruck  $B$ , wenn für jede Belegung  $\alpha$  die Beziehung  $w_\alpha(A) = w_\alpha(B)$  gilt.

**Bezeichnung:**  $A \equiv B$

**Satz:** Die semantische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der aussagenlogischen Ausdrücke.

**Lemma:** Seien  $A$  und  $B$  zwei aussagenlogische Ausdrücke und  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl, so dass  $var(A) \cup var(B) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  gilt. Dann sind  $A$  und  $B$  genau dann semantisch äquivalent, wenn  $f_{A,n} = f_{B,n}$  gilt.

## Tautologie, Kontradiktion, Erfüllbarkeit

**Definition:** i) Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  heißt Tautologie, falls  $w_\alpha(A) = 1$  für jede Belegung  $\alpha$  gilt.

ii) Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  heißt Kontradiktion oder unerfüllbar, falls  $w_\alpha(A) = 0$  für jede Belegung  $\alpha$  gilt.

iii) Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  heißt erfüllbar, falls  $A$  keine Kontradiktion ist.

**Lemma:** Zwei aussagenlogische Ausdrücke  $A$  und  $B$  sind genau dann semantisch äquivalent, wenn der Ausdruck  $(A \leftrightarrow B)$  eine Tautologie ist.

# Tautologien I

**Satz:** Die folgenden aussagenlogische Ausdrücke sind Tautologien:

- i)  $(\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1)$  (doppelte Verneinung)
- ii)  $((p_1 \wedge p_1) \leftrightarrow p_1)$
- iii)  $((p_1 \vee p_1) \leftrightarrow p_1)$
- iv)  $((p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1))$  (Kommutativität der Konjunktion)
- v)  $((p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$  (Kommutativität der Disjunktion)
- vi)  $((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_1))$
- vii)  $((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \leftrightarrow p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))$  (Assoziativität der Konjunktion)
- viii)  $((p_1 \vee p_2) \vee p_3 \leftrightarrow p_1 \vee (p_2 \vee p_3))$  (Assoziativität der Disjunktion)

## Tautologien II

### Satz: (Fortsetzung)

- ix)  $((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_3))$  (Distributivgesetz)
- x)  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))$  (Distributivgesetz)
- xi)  $((p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2))$  (de Morgan-Regel)
- xii)  $((p_1 \vee p_2) \leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2))$  (de Morgan-Regel)
- xiii)  $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$  (Kontraposition)
- xiv)  $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$
- xv)  $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1))$
- xvi)  $((p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2)$
- xvii)  $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)$

## Parallele Substitution I

**Bezeichnung:**  $p\text{sub}(A, p, B)$  ist das Wort, das aus  $A$  entsteht, indem man jedes Vorkommen von  $p$  in  $A$  durch  $B$  ersetzt

**Lemma:** Seien  $A$  und  $B$  aussagenlogische Ausdrücke,  $p$  eine Variable und  $\alpha$  eine Belegung. Ferner sei die Belegung  $\beta$  durch

$$\beta(q) = \begin{cases} \alpha(q) & q \neq p \\ w_\alpha(B) & q = p \end{cases}$$

definiert. Dann gilt

$$w_\alpha(p\text{sub}(A, p, B)) = w_\beta(A).$$



## Parallele Substitution II

**Satz:** Sind  $A$  eine Tautologie und  $p$  eine Variable, so ist für jeden aussagenlogischen Ausdruck  $B$  auch  $psub(A, p, B)$  eine Tautologie.

**Satz:** Sind  $A$  und  $A'$  zwei semantische äquivalente Ausdrücke und  $p$  eine Variable, so sind für jeden aussagenlogischen Ausdruck  $B$  auch die Ausdrücke  $psub(A, p, B)$  und  $psub(A', p, B)$  semantisch äquivalent.

## Sequentielle Substitution und ein Lemma

**Bezeichnung:** Für aussagenlogische Ausdrücke  $A$  und  $B$  und einen Teilausdruck  $C$  von  $A$  ist  $ssub(A, C, B)$  die Menge der Wörter, die aus  $A$  entsteht, indem wir *ein* Vorkommen von  $C$  in  $A$  durch  $B$  ersetzen.

**Satz:** Seien  $B$  und  $C$  zwei semantisch äquivalente Ausdrücke,  $A$  ein Ausdruck und  $C$  ein Teilausdruck von  $A$ . Dann ist  $A$  zu jedem Ausdruck aus  $ssub(A, C, B)$  semantisch äquivalent.

**Satz:** Seien  $B$  und  $C$  zwei semantisch äquivalente Ausdrücke,  $A$  eine Tautologie und  $C$  ein Teilausdruck von  $A$ . Dann ist jeder Ausdruck aus  $ssub(A, C, B)$  eine Tautologie.

**Lemma:** Für einen Ausdruck  $A$ , eine Tautologie  $B$  und eine Kontradiktion  $C$  gelten

$$A \wedge B \equiv A \quad \text{und} \quad A \vee C \equiv A.$$

# Normalformen I

**Definition:** Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  ist in konjunktiver Normalform, falls  $A$  die Form

$$A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$$

für ein  $m \geq 1$  hat, wobei jeder der Ausdrücke  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , die Form

$$A_i = (A_{i,1} \vee A_{i,2} \vee \cdots \vee A_{i,n_i})$$

mit  $n_i \geq 1$  hat, in der jeder Ausdruck  $A_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ , ein Literal ist.

## Normalformen II

**Definition:** Ein aussagenlogischer Ausdruck  $A$  ist in disjunktiver Normalform, falls  $A$  die Form

$$A = (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_m)$$

für ein  $m \geq 1$  hat, wobei jeder der Ausdrücke  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , die Form

$$A_i = (A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \cdots \wedge A_{i,n_i})$$

mit  $n_i \geq 1$  hat, in der jeder Ausdruck  $A_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ , ein Literal ist.

## Normalformen III

**Satz:** Zu jedem aussagenlogischen Ausdruck gibt es einen semantisch äquivalenten Ausdruck, bei dessen Konstruktion nur Negation, Konjunktion und Disjunktion (Alternative) benutzt werden.

**Satz:** Zu jedem aussagenlogischen Ausdruck  $A$  gibt es aussagenlogische Ausdrücke  $B$  in konjunktiver Normalform und  $C$  in disjunktiver Normalform, für die  $A \equiv B$  und  $A \equiv C$  gelten.

**Folgerung:** Zu jeder  $n$ -stelligen Booleschen Funktion  $f$  gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck  $A$  mit  $\text{var}(A) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  und  $f = f_A$ .

## Normalformen IV

$$A = \neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow p_3))$$

disjunktive Normalform

$$M = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1),$$

$$m_{(1,0,0)} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

$$m_{(1,0,1)} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$$

$$m_{(1,1,1)} = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

$$\begin{aligned} &((p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \\ &\quad \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)) \end{aligned}$$

konjunktive Normalform

$$M' = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\} \\ \quad (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

$$s_{(0,0,0)} = (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$

$$s_{(0,0,1)} = (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$$

$$s_{(0,1,0)} = (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

$$s_{(0,1,1)} = (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$

$$s_{(1,1,0)} = (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

$$\begin{aligned} &((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \\ &\quad \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \\ &\quad \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)) \end{aligned}$$

# Entscheidungsprobleme

## Probleme:

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck erfüllbar?

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck eine Tautologie?

Ist ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck eine Kontradiktion?

## Reduktionen:

Ein Ausdruck  $A$  ist genau dann eine Kontradiktion, wenn  $A$  nicht erfüllbar ist.

Ein Ausdruck  $A$  ist genau dann eine Tautologie, wenn  $\neg A$  nicht erfüllbar ist.

## Definitionsbasierter Algorithmus

*Eingabe:* Aussagenlogischer Ausdruck  $A$  mit  $n$  Variablen

$m = 0; i = 0;$

**while** ( $m == 0 \ \&\& \ i < 2^n$ ) {  $m = w_{\alpha_i}(A); i = i + 1;$ }

**if** ( $m == 0$ ) Gib „ $A$  ist nicht erfüllbar“ aus;  
    **else** Gib „ $A$  ist erfüllbar“ aus;

(dabei ist  $\alpha_i$  die Belegung für die  $\alpha_i(p_1)\alpha_i(p_2) \dots \alpha_i(p_n)$  die Binärdarstellung von  $i$  ist)

**Komplexität:** exponentiell



## Klausel und Resolvente

**Definition:** Eine Klausel über  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ist eine Menge

$$K = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}, \neg p_{j_1}, \neg p_{j_2}, \dots, \neg p_{j_s}\}$$

mit

$$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_n\} \text{ und } \{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_s}\} \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}.$$

**Definition:**  $K_1$ ,  $K_2$  und  $R$  seien Klauseln.  $R$  heißt Resolvente von  $K_1$  und  $K_2$ , falls es eine Variable  $p$  derart gibt, dass

- $p \in K_1$  und  $\neg p \in K_2$  und
- $R = (K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$

gelten.

## Klauseln und Normalformen

Alternative  $A = (p_{i_1} \vee p_{i_2} \vee \dots \vee p_{i_r} \vee \neg p_{j_1} \vee \neg p_{j_2} \vee \dots \vee \neg p_{i_s})$

entspricht „eineindeutig“

Klausel  $K_A = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}, \neg p_{j_1}, \neg p_{j_2}, \dots, \neg p_{i_s}\}$

konjunktive Normalform  $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r)$

entspricht „eineindeutig“

Menge von Klauseln  $K = \{K_{A_1}, K_{A_2}, \dots, K_{A_r}\}$

## Resolutionshülle

**Definition:** Für eine Menge  $K$  von Klauseln setzen wir

$$\text{res}(K) = K \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } K\},$$

$$\text{res}^0(K) = K,$$

$$\text{res}^{n+1}(K) = \text{res}(\text{res}^n(K)) \text{ für } n \geq 0,$$

$$\text{res}^*(K) = \bigcup_{i \geq 0} \text{res}^i(K).$$

**Satz:** Sei  $K$  eine endliche Menge von Klauseln. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $k \geq 0$  derart, dass

$$\text{res}^{k+n}(K) = \text{res}^k(K) \text{ für } n \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{res}^*(K) = \text{res}^k(K)$$

gelten.

## Aussagen zur Resolution

**Lemma:** Es sei  $R$  die Resolvente von  $K' \in K$  und  $K'' \in K$ . Dann ist der zur Klauselmenge  $K = \{K', K''\}$  gehörende aussagenlogische Ausdruck  $A = A_K = (D_{K'} \wedge D_{K''})$  semantisch äquivalent zu dem zur Klauselmenge  $L = \{K', K'', R\}$  gehörenden Ausdruck  $B = A_L = (D_{K'} \wedge D_{K''} \wedge D_R)$ .

**Lemma:** Für eine endliche Menge  $K$  von nichtleeren Klauseln sind die zu  $K$ ,  $res^t(K)$  für  $t \geq 0$  und  $res^*(K)$  gehörenden Ausdrücke semantisch äquivalent zueinander.

**Satz:** Der zu einer endlichen Klauselmenge  $K$  von nichtleeren Klauseln gehörende Ausdruck ist genau dann unerfüllbar, wenn  $\emptyset \in res^*(K)$  gilt.

## Resolutionsalgorithmus

*Eingabe:* Klauselmengemenge  $K$  eines aussagenlogischen Ausdrucks  $A$   
(oder konjunktive Normalform zu  $A$ , aus der dann  $K$   
gewonnen wird)

$n = 1; R[0] = K; R[1] = res(K);$

**while** ( $\emptyset \notin R[n] \ \&\& \ R[n] \neq R[n-1]$ ) { $n = n + 1; R[n] = res(R[n-1]);$ }

**if** ( $\emptyset \in R[n]$ ) Gib "  $A$  ist unerfüllbar" aus;  
    **else** Gib „ $A$  ist erfüllbar" aus;

**Komplexität:** exponentiell

# Hornausdruck

**Definition:**

Ein Hornausdruck ist ein aussagenlogischer Ausdruck in konjunktiver Normalform  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m)$ , bei dem jede Alternative  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , höchstens eine nichtnegierte Variable enthält.

**Satz:**

Der Algorithmus von Horn für das Erfüllbarkeitsproblem für Hornausdrücke ist korrekt.

## Algorithmus von Horn

*Eingabe:* Hornausdruck  $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m)$

$M = \emptyset; b = 1;$

```
for ( $i = 1; i \leq m; i++$ )  
    if ( $A_i = p$ ) { $M = M \cup \{p\}; b = 0;$ }
```

```
while ( $b == 0$ )  
{  
     $b = 1;$   
    for ( $i = 1; i \leq m; i++$ )  
        if ( $A == (p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_k)$   
            &&  $p \notin M$  &&  $q_j \in M$  für  $1 \leq j \leq k$ )  
                {  $M = M \cup \{p\}; b = 0;$  }  
}
```

$a = 1;$

```
for ( $i = 1; i < m; i++$ )  
    { if ( $A_i == (\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_k)$   
        &&  $q_j \in M$  für  $1 \leq j \leq k$ )  
             $a = 0;$  }
```

```
if ( $a == 0$ ) Gib „ $A$  ist unerfüllbar“ aus;  
    else Gib „ $A$  ist erfüllbar“ aus;
```

**Komplexität:** polynomiell (Polynom vom Grad 3)