Logik

Übungsblatt 9
(für die 51. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2009/2010

Magdeburg, 7. Dezember 2009

1. Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Tautologien sind, falls A und B beliebige prädikatenlogische Ausdrücke sind.
   a) $(\forall x A \to \exists x A)$
   b) $(\exists x A \to \forall x A)$
   c) $(\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B))$
   d) $(\forall x(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B))$
   e) $(\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B))$
   f) $(\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B))$

2. Man beweise, dass weder $\forall x \exists y r(x,y)$ eine Folgerung von $\exists x \forall y r(x,y)$ ist, noch umgekehrt.

3. Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit
   $$F_1 = \{f\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$
   sowie $A = \forall x \exists y r(x, y, f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.
   a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
   b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.

4. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\exists v \forall u\, r(u,v) \to \forall x \exists y\, r(x,y))$ eine Tautologie ist.

5. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\forall x \exists y\, r(x,y) \to \exists v \forall u\, r(u,v))$ keine Tautologie ist.

6. Gegeben ist der prädikatenlogische Ausdruck
   $$((\forall x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x,y)).$$
   a) Bestimmen Sie zu diesem Ausdruck einen semantisch äquivalenten Ausdruck in pränexer Normalform.
   b) Bestimmen Sie zum obigen Ausdruck einen Ausdruck in Skolemform.
   c) Bestimmen Sie zum obigen Ausdruck einen Ausdruck in bereinigter Skolemform.