

# Logik

## Übungsblatt 8 (für die 50. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow  
im Wintersemester 2009/2010

Magdeburg, 30. November 2009

1. Es sei  $\mathcal{S}$  die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Geben Sie die Definition der Begriffe

- Interpretation  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{S}$ ,
- Belegung bez. einer Interpretation  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{S}$ ,
- Wert eines prädikatenlogischen Terms bez. einer Interpretation  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{S}$  und einer Belegung  $\alpha$ ,
- Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks bez. einer Interpretation  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{S}$  und einer Belegung  $\alpha$ .

2. Gegeben seien die Signatur  $\mathcal{S}$  durch  $K = \{c\}$ ,  $F_1 = \{f\}$ ,  $R_1 = \{r_1\}$ ,  $R_2 = \{r_2\}$ ,  $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$ , die Interpretation  $I = (U, \tau)$  durch  $U = \mathbb{N}$  und

$$\begin{aligned}\tau(c) &= 2, & \tau(f) &= F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) &= \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) &= R_{<} = \{(n, m) \mid n < m\}\end{aligned}$$

und die Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  mit  $\alpha(x) = 2$ . Bestimmen Sie die Werte  $w_\alpha^I(A)$  der Ausdrücke

- $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$ ,
- $A = \forall x(r_1(f(c)) \vee r_2(x, f(x)))$ ,
- $A = \exists x(r_2(f(c), x) \wedge \neg r_2(x, f(x)))$ ,
- $A = (\exists x r_2(f(c), x) \wedge \exists x \neg r_2(x, f(x)))$ .

3. Gegeben seien die Signatur  $\mathcal{S}$  durch  $K = \{c\}$ ,  $F_1 = \{f\}$ ,  $R_1 = \{r_1\}$ ,  $R_2 = \{r_2\}$ ,  $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$  für  $i \geq 3$ , die Interpretation  $I = (U, \tau)$  durch  $U = \{a, b\}^*$  und

$$\begin{aligned}\tau(c) &= ab, \\ \tau(f) &= F: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \quad \text{mit} \quad F(u) = \begin{cases} aa u' & \text{für } u = a u', \\ u & \text{sonst,} \end{cases} \\ \tau(r_1) &= \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ beginnt mit } a\}, \\ \tau(r_2) &= \{(u, v) \mid |u| \leq |v|\}\end{aligned}$$

sowie die Belegung  $\alpha$  bez.  $I$  mit  $\alpha(x) = bb$ . Bestimmen Sie die Werte  $w_\alpha^I(A)$  der Ausdrücke

- $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$ ,
- $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$ ,
- $A = \forall x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$ ,
- $A = \exists x(r_1(f(x)) \wedge r_2(f(x), x))$ ,
- $A = (\exists x r_1(f(x)) \wedge \exists x r_2(f(x), x))$ .

4. Es sei  $\mathcal{S}_1$  die Signatur, die durch

$$K = \emptyset, \quad R_2 = \{r\}, \quad R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset \quad \text{für } i \geq 3$$

gegeben ist. Ferner seien

$$\begin{aligned}A_1 &= \forall x r(x, x), \\ A_2 &= \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)), \\ A_3 &= \forall x \forall y \forall z ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \rightarrow r(x, z)).\end{aligned}$$

Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

- $\{A_1, A_2, A_3\}$ ,
- $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$ ,
- $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$ ,
- $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$ .