Logik

Übungsblatt 5
(für die 47. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2009/2010

Magdeburg, 9. November 2009

1. Eine Alternative $B = (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ heißt *positiv*, wenn alle B_i, $1 \leq i \leq n$, Variable sind.

   Eine Alternative $B = (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ heißt *negativ*, wenn alle B_i, $1 \leq i \leq n$, negierte Variable sind.

   a) Beweisen Sie, dass jeder aussagenlogische Ausdruck $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$ in konjunktiver Normalform, in dem keine der Alternativen A_i, $1 \leq i \leq m$, positiv ist, erfüllbar ist.

   b) Beweisen Sie, dass jeder aussagenlogische Ausdruck $A = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$ in konjunktiver Normalform, in dem keine der Alternativen A_i, $1 \leq i \leq m$, negativ ist, erfüllbar ist.

2. Geben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe wider.

   a) *Klausel*,

   b) *Resolvente* von Klauseln,

   c) $\text{res}(K)$ für eine Menge K von Klauseln,

   d) $\text{res}^n(K)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ für eine Menge K von Klauseln sowie

   e) $\text{res}^*(K)$ für eine Menge K von Klauseln.

3. Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2, 3$

   $$\text{res}^k(\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}, \{\neg r\}\}).$$

4. Bestimmen Sie $\text{res}^*(K)$ für

   $$K = \{\{p, q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}, \{\neg r\}\}.$$

5. Zeigen Sie, dass es zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, eine Klauselmenge K über der Variablenmenge $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, für die $\text{res}^{n-1}(K) \neq \text{res}^n(K) = \text{res}^*(K)$ gilt.