Prof. Dr. Jürgen Dassow
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik

P E T R I — N E T Z E

Vorlesungsskript

Magdeburg, Oktober 2008 – Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Petri-Netze und ihr Verhalten

3.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt geben wir die Definition eines Petri-Netzes und einige der damit in engem Zusammenhang stehenden Konzepte.

Der Unterschied zwischen den Netzgraphen des voran gehenden Kapitels und den Petri-Netzen im einführenden Kapitel besteht im Wesentlichen darin, dass bei den Petri-Netzen die Stellen mit (teilweise unterschiedlichen) Marken versehen sind. In diesem Kapitel beschränken wir uns darauf, dass nur ein Art von Marken vorhanden ist. Daher reicht es, die Anzahl der Marken auf einer Stelle anzugeben. Die folgende Definition formalisiert diese Idee.

Definition 3.1 *Eine Markierung eines Netzgraphen $N = (S, T, F)$ ist eine Funktion $m : S \to \mathbf{N}_0$, die jeder Stelle eine natürliche Zahl zuordnet.*

Da die Markierung nur von der Menge der Stellen abhängt, werden wir auch sagen, dass m eine Markierung von S ist.

Da eine Markierung m genau auf den Stellen definiert ist und ein Netzgraph nur endlich viele Stellen hat, sagen wir $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, können wir m auch als n-dimensionalen Vektor $(m(s_1), m(s_2), \dots, m(s_n))$ über $\mathbf{N}_0$ auffassen.

Nun sind wir in der Lage, Petri-Netze zu definieren.

Definition 3.2 *Ein Petri-Netz ist ein Quintupel $N = (S, T, F, V, m_0)$, wobei*
— (S, T, F) ein Netzgraph ist,
— $V : F \to \mathbf{N}$ eine Funktion ist, die jeder Kante eine natürliche Zahl zuordnet,
— m_0 eine Markierung von S ist.

Zusätzlich zu den Netzgraphkomponenten treten beim Petri-Netz eine Markierung m_0, die sogenannte Anfangsmarkierung, und eine Funktion V auf, die jeder Kante $f \in F$ ein *Gewicht* $V(f)$ zuordnet. Die Gewichte werden oft auch *Vielfachheit* genannt. Für $(x, y) \in F$ werden wir anstelle von $V((x, y))$ meist nur kurz $V(x, y)$ schreiben. In unserer graphischen Präsentationen von Petri-Netzen werden wir nur dann das Gewicht an eine Kante schreiben, falls es von 1 verschieden ist. Die Markierung der Stellen wird in den Graphiken stets dadurch angeben, dass wir die Stelle s, für die $m(s) = k$ ist, mit k Marken $\bullet$ versehen.

Petri-Netze heißen *gewöhnlich*, wenn alle Kanten das Gewicht 1 haben.

Wir werden im Folgenden einem Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ eine Eigenschaft X von Netzgraphen zuschreiben, wenn der zum Petri-Netz gehörende Netzgraph (S, T, F) die Eigenschaft X hat. So können wir dann zum Beispiel einfach sagen, dass das Petri-Netz eine Zustandsmaschine, ein Free-Choice-Netz usw. ist.

Beispiel 3.3 In Abbildung 3.1 ist das Petri-Netz N_5 gegeben. In N_5 hat die Kante (s_4, t_1)

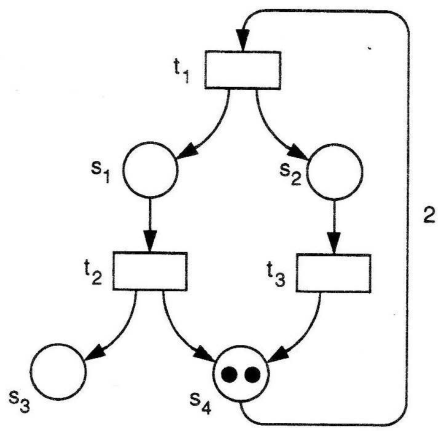


Abbildung 3.1: Petri-Netz N_5

das Gewicht 2, alle anderen Kanten haben das Gewicht 1. Bei der Anfangsmarkierung m_0 wird der Stelle s_4 der Wert 2 zugeordnet und alle anderen Stellen sind mit 0 markiert. Wenn wir für die Stellen die fixierte Anordnung s_1, s_2, s_3, s_4 annehmen, können wir m_0 als Vektor $(0, 0, 0, 2)$ beschreiben.

Veränderungen in einem Petri-Netz werden dadurch vorgenommen, dass durch Schalten einer Transition des Netzes die Markierung verändert wird. Daher ist es erforderlich festzulegen, wann eine Transition schalten kann und was das Schalten bewirkt.

Definition 3.4 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, m eine Markierung von N und t eine Transition aus T.*

i) Wir sagen, dass t bei m aktiviert *ist, wenn für alle $s \in \bullet t$ gilt, dass $m(s) \geq V(s, t)$ gilt.*

ii) Wenn t bei m aktiviert ist, so kann t schalten, wodurch aus m die Markierung m' entsteht, die durch

$$m'(s) = \begin{cases} m(s) - V(s,t) + V(t,s) & \text{falls } s \in \bullet t \text{ und } s \in t\bullet \\ m(s) - V(s,t) & \text{falls } s \in \bullet t \text{ und } s \notin t\bullet \\ m(s) + V(t,s) & \text{falls } s \notin \bullet t \text{ und } s \in t\bullet \\ m(s) & \text{falls } s \notin \bullet t \text{ und } s \notin t\bullet \end{cases}$$

definiert ist.

Das Schalten einer Transition t besteht intuitiv aus dem Schieben von Marken auf Stellen durch die Transition. Dabei werden jeder Stelle s aus dem Vorbereich von t soviel Marken entnommen, wie das Gewicht der Kanten von s nach t angibt, und jede Stelle s' aus dem Nachbereich von t erhält zusätzlich soviel Marken, wie das Gewicht der Kante von t nach s' angibt. Damit dieser Vorgang ablaufen kann, ist es folglich notwendig, dass jede Stelle $s \in \bullet t$ mindestens soviel Marken enthält, wie das Gewicht der Kante von s nach t angibt. Dies bedeutet gerade, dass t aktiviert unter m ist.

Wir merken aber an, dass die Vorstellung des Schiebens von Marken für viele Modellierungen nicht völlig zutrifft. Eigentlich werden zuerst die Marken von den Stellen des Vorbereichs genommen, verarbeitet und das Ergebnis der Verarbeitung auf die Stellen des Nachbereichs abgelegt. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn die Marken eine semantische Bedeutung haben.

Wenn aus der Markierung m durch Schalten von t die Markierung m' entsteht, so schreiben wir

$$m\,[t > m'.$$

Beispiel 3.3 (Fortsetzung) Im Petri-Netz N_5 aus Abbildung 3.1 ist nur die Transition t_1 aktiviert, durch deren Schalten die Markierung m_1 entsteht, bei der auf s_1 und s_2 jeweils eine Marke liegt. Wir haben also

$$m_0\,[t_1 > m_1 = (1,1,0,0)\,.$$

Bei m_1 sind sowohl t_2 als auch t_3 aktiviert. Wir können daher sowohl t_2 als auch t_3 schalten. Dabei erhalten wir

$$m_1\,[t_3 > m_2 = (1,0,0,1) \quad \text{und} \quad m_1\,[t_2 > m_3 = (0,1,1,1).$$

Bei m_2 ist nun nur t_2 aktiviert, denn t_1 ist nur aktiviert, wenn auf s_4 mindestens zwei Marken liegen, und t_3 ist nur aktiviert, wenn auf s_2 mindestens eine Marke liegt. Analog ist bei m_4 nur t_3 aktiviert. Durch die entsprechenden Schaltungen erhalten wir

$$m_2\,[t_2 > m_4 = (0,0,1,2) \quad \text{und} \quad m_3\,[t_3 > m_4 = (0,0,1,2),$$

d.h. in beiden Fällen erhalten wir das gleiche Resultat. Nun ist wieder nur t_1 aktiviert, und der eben geschilderte Zyklus kann erneut durchlaufen werden. Offensichtlich wird bei jedem Zyklus eine zusätzliche Marke auf der Stelle s_3 erzeugt. Damit haben wir insgesamt die Markierungen

$$m_{0,i} = (0,0,i,2),\; m_{1,i} = (1,1,i,0),\; m_{2,i} = (1,0,i,1),\; m_{3,i} = (0,1,i+1,1)$$

mit den Übergängen

$$m_{0,i}\,[t_1 > m_{1,i},\; m_{1,i}\,[t_2 > m_{3,i+1},\; m_{1,i}\,[t_3 > m_{2,i},\; m_{2,i}\,[t_2 > m_{0,i+1},\; m_{3,i+1}\,[t_3 > m_{0,i+1}\,.$$

Im Beispiel haben wir gesehen, dass durch das Schalten wiederum gewisse Transitionen aktiviert sind, damit schalten können usw. Es ist daher naheliegend, Folgen von Schaltungen zu betrachten, deren Elemente nacheinander geschaltet werden können, d.h. wir erweitern die durch $[t >$ gegebene Relation auf Folgen aus T^*. Wir werden dies induktiv über die Länge der Folge definieren.

Definition 3.5 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ und m und m' Markierungen von N.*

i) Wir setzen $m\,[\lambda > m$ (λ ist das leere Wort über T, $|\lambda| = 0$).

ii) Es gilt für eine Folge $q \in T^*$ und eine Transition $t \in T$ genau dann $m\,[qt > m'$, falls es eine Markierung m'' derart gibt, dass $m[q > m''$ gilt, t bei m'' aktiviert ist und $m''\,[t > m'$ gilt.

iii) Falls $m\,[q > m'$ für ein $q \in T^*$ und gewisse Markierungen m und m' gilt, so nennen wir q eine Schaltfolge *für m.*

iv) Die Beziehung $m\,[* > m'$ gilt genau dann, wenn es ein $q \in T^*$ so gibt, dass $m\,[q > m'$ gilt.

Definition 3.6 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und m eine Markierung von N. Wir setzen*

$$R(N, m) = \{m' \mid m\,[* > m'\} \text{ und } L(N, m) = \{q \mid m\,[q > m' \text{ für eine Markierung } m'\}.$$

Die Menge $R(N, m)$ ist die Menge der in N von m aus erreichbaren Markierungen und $L(N, m)$ ist die Menge der Schaltfolgen für m.

Beispiel 3.3 (Fortsetzung) Aufgrund unserer obigen Überlegungen erhalten wir für das Netz N_5 aus Abbildung 3.1

$$R(N, m_0) = \bigcup_{i \geq 0} \{m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i}\}$$

während sich für die Markierung $m_{2,0}$ nur die Menge

$$R(N, m_{2,0}) = \{m_{2,0}\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i}\}$$

ergibt, da die Markierungen $m_{0,0}, m_{1,0}$ und $m_{3,0}$ von $m_{2,0}$ aus nicht erreicht werden können. Außerdem gelten

$$\begin{aligned}
L(N, m_0) &= \{t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_r \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 1 \leq i \leq r\} \\
&\quad \cup \{t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_rt_1u \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r, u \in \{t_2, t_3\}\} \\
&\quad \cup \{t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_rt_1 \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\}, \\
L(N, m_{2,0}) &= \{t_2t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_r \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\} \\
&\quad \cup \{t_2t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_rt_1u \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r, u \in \{t_2, t_3\}\} \\
&\quad \cup \{t_2t_1u_1t_1u_2 \dots t_1u_rt_1 \mid u_i \in \{t_2t_3, t_3t_2\} \text{ für } 0 \leq i \leq r\},
\end{aligned}$$

da wir in einem Zyklus die Reihenfolge zwischen t_2 und t_3 beliebig wählen können.

Wenn die Markierungen und ihre Übergänge durch Schalten betrachtet werden, so kann ein Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ auch als Automat $\mathcal{A} = (R(N, m_0), T, m_0, \delta)$ aufgefasst werden, bei dem die von m_0 erreichbaren Markierungen die Menge der Zustände bilden, die Eingaben den Transitionen entsprechen, die Anfangsmarkierung m_0 als Initialzustand fungiert und die Überführungsfunktion δ durch $\delta(m, t) = m'$ mit $m\,[t > m'$ definiert ist. Man beachte aber, dass es sich dabei um einen unendlichen Automaten handelt, wenn die Menge $R(N, m_0)$ unendlich ist.

Der Automat kann durch einen Graphen beschrieben werden, der als Erreichbarkeitsgraph bezeichnet wird und wie folgt definiert ist.

Definition 3.7 *Es sei $N = (S, T; F, V, m_0)$ ein Petri-Netz. Der* Erreichbarkeitsgraph *$EG(N)$ von N ist der gerichtete kantenbeschriftete Graph $EG(N) = (R(N, m_0), B(N))$, wobei $B(N)$ durch*

$$B(N) = \{[m, t, m'] \mid m, m' \in R(N, m_0),\ t \in T,\ m\,[t > m'\}$$

definiert ist.

Üblicherweise wird die Kante eines Graphen von x nach y als Paar (x, y) gegeben. Wir benutzen hier Tripel $[x, t, y]$, weil wir neben Ausgangs- und Endknoten der Kante auch noch die Transition t vermerken wollen, die den Übergang zwischen den Knoten x und y verursacht. In graphischen Repräsentationen werden wir einfach ein t an die Kante schreiben.

Beispiel 3.3 (Fortsetzung) Wir betrachten erneut das Netz N_5 aus Abbildung 3.1. Da die Erreichbarkeitsmenge $R(N, m_0)$ oben als unendlich nachgewiesen wurde, ist der Erreichbarkeitsgraph von N_5 unendlich. Wir geben in Abbildung 3.2 einen Teil von $EG(N_5)$ an.

$$\begin{tikzcd}
 & (0,0,0,2) \arrow[d, "t_1"'] & \\
 & (1,1,0,0) \arrow[dl, "t_2"] \arrow[dr, "t_3"'] & \\
(0,1,1,1) \arrow[dr, "t_3"'] & & (1,0,0,1) \arrow[dl, "t_2"] \\
 & (0,0,1,2) \arrow[d, "t_1"'] & \\
 & (1,1,1,0) \arrow[dl, "t_2"] \arrow[dr, "t_3"'] & \\
(0,1,2,1) \arrow[dr, "t_3"'] & & (1,0,1,1) \arrow[dl, "t_2"] \\
 & (0,0,2,2) \arrow[d, "t_1"'] & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.2: Teil des Erreichbarkeitsgraphen vom Petri-Netz N_5 aus Abbildung 3.1

Wir modifizieren das Netz N_5 aus Abbildung 3.1 zum Netz N_5', indem wir den Knoten s_3 und die Kante von t_2 nach s_3 streichen. Der Erreichbarkeitsgraph von N_5' ist in Abbildung 3.3 gegeben.

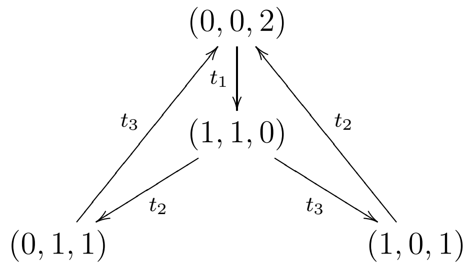


Abbildung 3.3: Erreichbarkeitsgraphen des Petri-Netzes N_5'

Offensichtlich existiert in einem Petri-Netz N mit einem unendlichen Erreichbarkeitsgraphen mindestens eine Stelle s so, dass die Anzahl der Marken auf s beliebig groß wird. Dies ist aber in der praktischen Anwendung hinderlich, denn intuitiv bedeutet dies, dass sich an einem Ort sich unendlich viele Objekte befinden können. Um dies zu verhindern, schränkt man die Menge der zugelassenen Markierungen ein. Man fordert Höchstgrenzen für die Anzahl der Marken auf einer Stelle.

Definition 3.8 *Ein Petri-Netz mit Kapazitätsbeschränkung ist durch ein Sechstupel* $N = (S, T, F, V, K, m_0)$ *gegeben, wobei* (S, T, F, V, m_0) *ein Petri-Netz und* $K : S \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ *eine Funktion ist, die jeder Stelle eine natürliche Zahl oder den Wert* ∞ *zuordnet.*

Die Funktion K gibt an, dass auf der Stelle $s \in S$ maximal $K(s)$ Marken liegen dürfen. Entsprechend der Definition kann die Schranke für die Marken auch unendlich sein. Ein Petri-Netz kann also als ein Petri-Netz mit Kapazitätsbeschränkung K, für die $K(s) = \infty$ für alle $s \in S$ gilt. Bei der graphischen Darstellung von Petri-Netzen mit Kapazitätsbeschränkung geben wir nur bei den Stellen s den Wert $K(s)$ an, wenn dieser nicht unendlich ist.

Beispiel 3.9 Wir modifizieren das Petri-Netz N_5 aus Abbildung 3.1 zum Petri-Netz N_5'' mit Kapazitätsbeschränkung, indem wir zusätzlich K durch $K(s_1) = K(s_2) = K(s_4) = \infty$ und $K(s_3) = 1$ festlegen. Obwohl wir nur eine Stelle hinsichtlich ihrer Kapazität beschränken, erhalten in diesem Fall auch einen endlichen Erreichbarkeitsgraphen, der in Abbildung 3.4 angegeben ist. Dies folgt natürlich daraus, dass die beschränkte Stelle s_3 die einzige ist, die durch Schalten von Transitionen in N_5 beliebig große Markenzahl erreichen kann. Wir weisen aber darauf hin, dass die Kapazitätsbeschränkung zu einem anderen Erreichbarkeitsgraphen führt als das Streichen von s_3 (siehe Abbildung 3.3).

Wir wollen nun eine Beschreibung des Schaltens von Transitionen mit algebraischen Mitteln geben. Dazu definieren noch für zwei k-dimensionale Vektoren $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ über $\mathbf{N}$ Vergleichsrelationen durch

$$\begin{aligned} x \le y \quad & \text{genau dann, wenn} \quad x_i \le y_i \text{ für } 1 \le i \le k, \\ x < y \quad & \text{genau dann, wenn} \quad x \le y \text{ und } x \ne y. \end{aligned}$$

Demnach gilt $x < y$ genau dann, wenn $x_i \le y_i$ für $1 \le i \le k$ gilt und ein j ein $x_j < y_j$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
 & (0,0,0,2) \arrow[d, "t_1"'] & \\
 & (1,1,0,0) \arrow[dl, "t_2"] \arrow[dr, "t_3"'] & \\
(0,1,1,1) \arrow[dr, "t_3"'] & & (1,0,0,1) \arrow[dl, "t_2"] \\
 & (0,0,1,2) \arrow[d, "t_1"'] & \\
 & (1,1,1,0) \arrow[d, "t_3"'] & \\
 & (1,0,1,1) &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.4: Erreichbarkeitsgraphen vom Netz N_5''

Definition 3.10 *Für ein Petri-Netz* $N = (S, T, F, V, m_0)$ *und eine Transition* t *definieren wir die Funktionen* $t^- : T \to \mathbf{N}_0,$, $t^+ : T \to \mathbf{N}_0$ *und* $\Delta t : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *durch*

$$\begin{aligned}
t^-(s) &= \begin{cases} V(s,t) & \textit{für } s \in \bullet t \\ 0 & \textit{für } s \in S \setminus \bullet t \end{cases}, \\
t^+(s) &= \begin{cases} V(t,s) & \textit{für } s \in t\bullet \\ 0 & \textit{für } s \in S \setminus t\bullet \end{cases}, \\
\Delta t(s) &= t^+(s) - t^-(s) \quad \textit{für} \quad s \in S.
\end{aligned}$$

Die Funktion t^- gibt an, wieviel Marken den Stellen beim Schalten von t entzogen werden, t^+ gibt an, wieviel Marken den Stellen beim Schalten von t hinzugefügt werden, und Δt gibt für jede Stelle die Änderung der Markenzahl beim Schalten von t an. Die folgenden Aussagen sind aufgrund der Definitionen offensichtlich.

Lemma 3.11 *Es seien* $N = (S, T, F, V, m_0)$ *ein Petri-Netz,* $t \in T$ *und* m *und* m' *zwei Markierungen von* N.

i) Die Transition t *ist genau aktiviert bei* m*, wenn* $t^- \leq m$ *gilt.*

ii) Es gilt genau dann $m\,[t > m'$*, wenn* $t^- \leq m$ *und* $m' = m + \Delta t$ *gelten.* □

Lemma 3.12 *Es seien* $N = (S, T, F, V, m_0)$ *ein Petri-Netz,* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *Transitionen aus* T *und* m, m' *und* m'' *Markierungen von* N.

i) Aus $m\,[t_1 t_2 \ldots t_n > m'$ *folgt* $m' = m + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n$.

ii) Wenn $t_1 t_2 \ldots t_n$ *eine Schaltfolge für* m *ist und* $m \leq m''$ *gilt, so ist* $t_1 t_2 \ldots t_n$ *auch eine Schaltfolge für* m''.

Beweis. i) kann einfach durch Induktion über die Anzahl n der Transitionen bewiesen werden.

ii) Wenn t_1 bei m aktiviert ist, d.h. $t^- \leq m$, so ist t_1 wegen $m \leq m''$ auch bei m'' aktiviert. Damit können wir in beiden Fällen t_1 schalten und erhalten $m\,[t_1 > m + \Delta t_1$ und $m''\,[t_1 > m'' + \Delta t_1$. Wegen $m \leq m''$, haben wir auch $m + \Delta t_1 \leq m'' + \Delta t_1$. Da t_2 bei $m{+}\Delta t_1$ aktiviert ist, ist t_2 auch bei $m''{+}\Delta t_1$ aktiviert und kann in beiden Fällen geschaltet werden. Wir wenden diese Argument iterativ an und erhalten, dass t_i, $1 \leq i \leq n$, sowohl bei $m + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_{i-1}$ als auch bei $m'' + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_{i-1}$ geschaltet werden kann. Damit ist $t_1 t_2 \ldots t_n$ auch Schaltfolge für m''. □

Falls $q = t_1 t_2 \ldots t_n$ eine Schaltfolge für m ist, so schreiben wir für das Ergebnis des Schaltens von q auch einfach $m + \Delta q$ mit $\Delta q = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n$.

Definition 3.13 *Es sei $N = (\{s_1, s_2, \ldots s_r\}, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz.*

i) Die Inzidenzmatrix $I(N)$ *von N ist die (n, r)-Matrix, bei der für $1 \leq i \leq n$ die i-te Zeile durch Δt_i gegeben ist.*

ii) Für eine Wort q über der Menge der Transitionen definieren wir den Parikh-Vektor

$$\pi(q) = (\#_{t_1}(q), \#_{t_2}(q), \ldots, \#_{t_n}(q)),$$

wobei $\#_t(q)$ die Anzahl des Vorkommens der Transition t in q ist.

Die Inzidenzmatrix und der Parikh-Vektor liefern eine einfache Möglichkeit zur Berechnung der Markierung m', die durch Schalten einer Schaltfolge q aus einer Markierung m erreicht wird, denn es gilt

$$m' = m + \pi(q) I(N).$$

Dies ist wie folgt einzusehen. Für $1 \leq i \leq n$ ist offensichtlich $\pi(t_i)$ der Vektor, der in der i-ten Komponente eine 1 und ansonsten nur Nullen hat. Damit gilt liefert $\pi(t_i)I(N)$ gerade die i-te Zeile von $I(N)$. Es gilt also $\pi(t_i)I(N) = \Delta t_i$. Außerdem ist offenbar

$$\pi(q) = \sum_{i=1}^{n} \#_{t_i}(q) \pi(t_i).$$

Damit ergibt sich

$$\pi(q)I(N) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \#_{t_i}(q)\pi(t_i)\Big) I(N) = \sum_{i=1}^{n} \#_{t_i}(q)\pi(t_i)I(N) = \sum_{i=1}^{n} \#_{t_i}(q)\Delta t_i = \Delta q,$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Kommutativität der Vektoraddition besteht. Folglich gilt $m' = m + \Delta q = \pi(q)I(N)$.

Schon bei ein einführenden Bemerkungen haben wir auf die besondere Rolle von Nebenläufigkeiten und Konflikten hingewiesen, da diese typisch für Petri-Netze und durch andere Systeme meist nicht modellierbar sind. Wir geben nun die formalen Definitionen.

Dazu erweitern wir zuerst die Funktion t^- auf Mengen $U \subseteq T$ von Transitionen durch die Setzung

$$U^- = \sum_{t \in U} t^- .$$

Definition 3.14 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $U \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und m eine Markierung von S. Die Menge U heißt* nebenläufig *bei m, wenn $U^- \leq m$ gilt.*

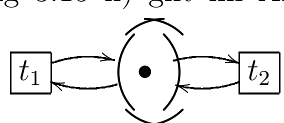
Nebenläufigkeit einer Menge U bedeutet daher, dass alle Transition von U gleichzeitig schalten können, denn auf jeder Stelle liegen genügend Marken dafür. Wie wir aber schon im ersten Kapitel bemerkt haben, muss kein gleichzeitiges Schalten erfolgen, die Transitionen aus U können auch in einer beliebigen Reihenfolge nacheinander schalten oder einige gleichzeitig und einige nacheinander. Damit haben wir auch die folgende Aussage.

Folgerung 3.15 *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz. Die Menge $U \subseteq T$ von Transitionen sei nebenläufig bei der Markierung m von S.*

i) Wenn $t \in U$ ist, so ist t bei m aktiviert.

ii) Wenn in dem Wort $q \in U^*$ jede Transition aus U höchstens einmal vorkommt, dann ist q eine Schaltfolge für m. □

Die Umkehrung von Folgerung 3.15 ii) gilt im Allgemeinen nicht, wie anhand des Netzes



zu sehen ist, denn t_1 und t_2 können in beliebiger Reihenfolge schalten und die Anfangsmarkierung m_0 bleibt dabei stets erhalten, aber $U = \{t_1, t_2\}$ ist wegen $U^- = 2 > 1 = m_0$ nicht nebenläufig. Die Ursache liegt in den Schlingen, wie der folgende Satz besagt.

Satz 3.16 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein schlingenfreies Petri-Netz, $U \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und m eine Markierung von S. Wenn die Transitionen aus U bei m in beliebiger Reihenfolge geschaltet werden können (d.h. jedes Wort $q \in U^*$, in dem jede Transition aus U genau einmal vorkommt, ist Schaltfolge bei m), dann ist U nebenläufig bei m.*

Beweis. Wir nehmen an, dass U nicht nebenläufig bei m ist. Dann existiert eine Stelle s mit $U^-(s) > m(s)$. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ seien die Transitionen mit $t^-(s) > 0$. Dann gilt

$$U^-(s) = \sum_{i=1}^{n} t_i^-(s) > m(s).$$

Nach Voraussetzung kann die Folge $t_1 t_2 \ldots t_n$ geschaltet werden. Dies wäre aber nicht möglich, wenn $t_i^+(s) = 0$ für $1 \leq i \leq n$ ist, da auf p nicht genügend Marken zum Schalten aller Transitionen liegen. Folglich gilt $t_i^+(s) > 0$ für ein i, $1 \leq i \leq n$. Damit bilden aber s und t_i eine Schlinge im Widerspruch zur vorausgesetzten Schlingenfreiheit des Petri-Netzes. □

Definition 3.17 *Eine Menge $U \subseteq T$ von Transitionen eines Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$ heißt* strukturell nebenläufig*, wenn U bei jeder Markierung m, bei der alle $t \in U$ aktiviert sind, nebenläufig ist.*

Wir wollen nun zeigen, dass die strukturelle Nebenläufigkeit (wirklich) eine strukturelle Eigenschaft des Netzes ist, d.h. nicht von den Markierungen sondern eigentlich nur von S, T und F abhängt.

Satz 3.18 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $U \subseteq T$ eine Menge von Transitionen. die Menge U ist genau dann strukturell nebenläufig, wenn die Vorplatzmengen der Transitionen aus U paarweise disjunkt sind.*

Beweis. Wenn die Vorbereiche $\bullet t$ für die Transitionen $t \in U$ paarweise disjunkt sind, so gibt es zu jeder Stelle $s \in S$ höchstens eine Transition $t_s \in U$ mit $t_s^-(s) > 0$. Folglich gilt für jede Markierung m, bei der alle $t \in U$ aktiviert sind die Beziehung

$$U^-(s) = \left\{ \begin{array}{ll} t_p^-(s) & \text{falls } U^-(s) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \leq m(s).$$

Dies besagt aber gerade, dass U nebenläufig bei m ist.

Für jede Stelle $s \in S$ definieren wir

$$m(s) = \max\{t^-(s) \mid t \in U\}.$$

Offensichtlich ist jede Transition $t \in U$ dann aktiviert, da $m(s) \geq t^-(s)$ für alle $t \in U$ gilt. Falls es eine Stelle s' und zwei Transitionen t' und t'' mit $s' \in \bullet t' \cap \bullet t''$ gibt, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $m(s') = (t')^-(s')$ gilt. Außerdem erhalten wir

$$U^-(s') = \sum_{i=1}^{n} t_i^-(s) \geq (t')^-(s') + (t'')^-(s') = m(s') + (t'')^-(s') > m(s').$$

Damit ist gezeigt, dass U nicht nebenläufig bei m ist. $\square$

Wir wenden uns nun den Konflikten zu.

Definition 3.19 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $U \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und m eine Markierung von S.*

i) Die Menge U heißt konfliktbehaftet bei m*, wenn alle Transitionen aus U aktiviert sind, aber U nicht nebenläufig bei m ist.*

ii) Die Menge U heißt strukturell konfliktbehaftet*, wenn es eine Markierung gibt, bei der U konfliktbehaftet ist.*

iii) Das Netz N heißt (dynamisch) konfliktfrei*, wenn jede Zweiermenge von Transitionen bei jeder erreichbaren Markierung $m \in R(N, m_0)$ nicht konfliktbehaftet ist, und es heißt* strukturell konfliktfrei *(oder* statisch konfliktfrei*), wenn keine Zweiermenge von Transitionen strukturell konfliktbehaftet ist.*

Wir geben einige einfache Folgerungen aus den Definitionen.

Folgerung 3.20 *i) Wenn das Petri-Netz N strukturell konfliktfrei ist, dann ist es konfliktfrei und jede Teilmenge $U \in T$ von Transitionen ist strukturell nebenläufig.*

ii) Das Petri-Netz ist genau dann strukturell konfliktfrei, wenn die Vorplatzmengen der Transitionen aus T paarweise disjunkt sind.

iii) Wenn eine Transition t eines konfliktfreien Netzes aktiviert ist, ist t die einzige Transition, durch die eine Markierung erreicht werden kann, bei der t nicht aktiviert ist.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen folgen aus den Definitionen und Satz 3.18.

iii) Es sei t' eine von t verschiedene Transition. Wenn t' auch aktiviert ist, so ist die Zweiermenge $\{t, t'\}$ nebenläufig. Damit ist $t't$ eine Schaltfolge. Folglich ist t nach dem Schalten von t' noch aktiviert. □

Folgerung 3.21 *Wenn das Petri-Netz strukturell konfliktfrei ist, so ist es ein erweitertes Free-Choice-Netz.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.12 und Definition 2.10 vi) sofort (da eine Implikation stets wahr ist, wenn ihre Voraussetzung nicht erfüllt ist). □

3.2 Beschränktheit und Erreichbarkeit

Wie haben oben schon bemerkt, dass es in der Praxis in der Regel unmöglich ist, dass auf einer Stelle beliebig viele Marken liegen können. Daher ist die folgende Definition sehr naheliegend, um beliebig viele Marken auf Stellen auszuschließen.

Definition 3.22 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $s \in S$ eine Stelle, m eine Markierung von S und k eine natürliche Zahl.*

i) Die Stelle s heißt k-beschränkt bei m, *wenn für jede Markierung von m erreichbare Markierung $m' \in R(N, m)$ gilt, dass $m(s) \leq k$ ist.*

ii) Wir nennen s beschränkt bei m, *wenn es ein k gibt, so dass s k-beschränkt bei m ist.*

iii) Das Netz N heißt beschränkt bei m, *wenn jede Stelle $s \in S$ beschränkt bei m ist.*

Wir lassen den Zusatz „bei m“ fort, wenn $m = m_0$ gilt.

Da S eine endliche Menge ist, können wir durch eine maximale Wahl von k erreichen, dass bei einem (bei m) beschränktem Netz jede Stelle in S höchstens k Marken trägt. Wir sagen dann auch, dass N k-beschränkt ist. Falls $k = 1$ ist, wird das Netz auch *sicher* genannt.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Beschränktheit eines Petri-Netzes und Petri-Netze mit Kapazitätsbeschränkung verschiedene Konzepte sind. Bei der Kapazitätsbeschränkung wird das Schalten von Transitionen verboten, wenn die Anzahl der Marken die Kapazitätsschranke übersteigen würde. Bei beschränkten Netzen darf eine gewisse Kapazität nie überschritten werden; ein Schalten wird aber nicht untersagt, verhindert aber die Beschränktheit.

Das Netz N_5 aus Abbildung 3.1 ist nicht beschränkt, denn für jedes $i \in \mathbf{N}_0$ ist die Markierung $(0, 0, i, 2)$ von m_0 aus erreichbar. Dagegen ist das Netz N_5', das aus N_5 durch Streichen von s_3 und (t_2, s_3) entsteht, ein beschränktes Petri-Netz, denn seine Erreichbarkeitsmenge besteht nur aus 4 Markierungen (siehe Abbildung 3.3), bei denen jede Komponente ≤ 2 ist. Damit ist N_5' sogar 2-beschränkt.

Aus den Definitionen ergibt sich sofort die folgende Aussage.

Satz 3.23 *Ein Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist genau dann beschränkt, wenn seine Erreichbarkeitsmenge $R(N, m_0)$ endlich ist.* □

Wir wissen vom Petri-Netz N_5 aus Abbildung 3.1, dass die Erreichbarkeitsmenge $R(N_5, m_0)$ unendlich sein kann. Daher ist die algorithmische Konstruktion des Erreichbarkeitsgraphen nicht ausreichend, um Beschränktheit entscheiden zu können. Wir wollen nun ein Kriterium für Unbeschränktheit herleiten. Falls dieses dann bei der Konstruktion des Erreichbarkeitsgraphen zutrifft, so können wir die Konstruktion abbrechen, da Beschränktheit nicht vorliegt. Dadurch wird es uns dann gelingen, einen Algorithmus zur Entscheidung der Beschränktheit zu gewinnen.

Satz 3.24 *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und m und m' Markierungen von S mit $m_0\,[q > m$ und $m\,[q' > m'$ für gewisse Schaltfolgen $q \in T^*$ und $q' \in T^*$. Wenn $m < m'$ gilt, so ist N nicht beschränkt.*

Beweis. Es gilt $m' = m + \Delta(q')$. Wegen $m < m'$ erhalten wir $0 < \Delta(q')$ für den Nullvektor 0. Wegen $m < m'$, ist die Folge q' nach Lemma 3.12 auch eine Schaltfolge für m'. Damit erhalten wir $m'\,[q' > m'' = m' + \Delta(q')$ und $m < m' < m''$. Damit ist q' auch Schaltfolge für m''. Wir setzen die Argumentation analog fort und erhalten

$$m\,[q' > m + \Delta(q')\,[q' > m + 2\Delta(q')\,[q' > m + 3\Delta(q')\,[q' > \ldots\,[q' > m + r\Delta(q')$$

für jedes $r \geq 0$. Damit ist $m + r\Delta(q') \in R(N, m_0)$ für jedes $r \geq 0$. Da $0 < \Delta(q')$ gibt es eine Komponente von $\Delta(q')$, die ≥ 1 ist. Dann hat diese Komponente in $m + r\Delta(q')$ mindestens den Wert r. Da r beliebig groß gewählt werden kann, gibt es eine Stelle in S (die dieser Komponente entspricht), der beliebig viele Marken zugeführt werden können. Damit kann das Netz nicht beschränkt sein. $\square$

Zum Beweis der Umkehrung benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 3.25 *Jede unendliche Folge von Zahlen aus $\mathbf{N}_0$ enthält eine unendliche monoton wachsende Folge.*

Beweis. Es sei M die Menge der Zahlen, die in der unendlichen Folge vorkommen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. M ist unendlich. Dann konstruieren wir die unendliche monoton wachsende Folge $x_0 x_1 x_2 \ldots$ wie folgt. Wir wählen als x_0 das erste Element der Folge. Es sei nun x_i schon bestimmt. Dann wählen wir als x_{i+1} das erste Element der Folge, das nach x_{i+1} kommt und größer als x_i ist. Ein derartiges Element muss es geben, denn wenn alle auf x_i folgende Elemente kleiner als x_i wären, so wären alle Elemente der Folge kleiner als das Maximum s der Elemente, die vor x_i kommen. Damit würde aber M in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, s\}$ enthalten und damit nicht unendlich sein, was im Widerspruch zu der Voraussetzung dieses Falles steht. Offensichtlich ist die so konstruierte Folge (streng) monoton wachsend.

Fall 2. M ist endlich. Dann gibt es ein Element u in M, dass unendlich oft in der Folge vorkommt (wäre dies nicht der Fall, so hätte die Folge nur endlich viele Elemente). Wir wählen nun als Teilfolge die Folge aller Vorkommen von u, die offenbar monoton wachsend ist. $\square$

Lemma 3.26 *Jede unendliche Folge von Markierungen eines Petri-Netzes N enthält eine monotone wachsende Folge von Markierungen.*

Beweis. Wir geben einen induktiven Beweis über die Anzahl der Stellen im Petri-Netz.

Nach Lemma 3.25 gilt die Behauptung für Petri-Netze, die nur eine einzige Stelle haben.

Es sei nun ein Petri-Netz mit den $n \geq 2$ Stellen $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ gegeben. Ferner sei $m_0, m_1, m_2, \ldots$ die gegebene Folge. Wir betrachten nun die Werte $m_0(s_1), m_1(s_1), m_2(s_1), \ldots$. Diese bilden offensichtlich eine unendliche Folge. Nach Lemma 3.25 gibt es darin eine monoton wachsende Folge $m_{i_0}(s_1), m_{i_1}(s_1), m_{i_2}(s_1), \ldots$. Nun betrachten wir die Folge der Markierungen $m'_{i_0}, m'_{i_1}, m'_{i_2}, \ldots$, wobei m'_j aus m_j entsteht, indem man die Komponente $m_j(s_1)$ streicht. Da die m'_j nur $n-1$ Komponenten haben, gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine unendliche monoton wachsende Folge $m'_{j_0}, m'_{j_1}, m'_{j_2}, \ldots$ in der Folge $m'_{i_0}, m'_{i_1}, m'_{i_2}, \ldots$. Offensichtlich ist dann sogar die Folge $m_{j_0}, m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots$ monoton wachsend, da nach Konstruktion Monotonie sowohl in der ersten Komponente als auch in den restlichen $n-1$ Komponenten vorliegt. Damit ist die gewünschte monoton wachsende Folge als existent nachgewiesen. □

Satz 3.27 *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz. Wenn N nicht beschränkt ist, so gibt es Markierungen m und m' von S mit $m_0\,[q > m$, $m\,[q' > m'$ für gewisse Schaltfolgen $q, q' \in T^*$ und $m < m'$.*

Beweis. Zu jeder Zahl n muss es eine Schaltfolge q_n der Länge n für m_0 geben. (Wenn wir das Gegenteil annehmen, d.h. es gibt eine Schranke r für die Länge der Schaltfolgen, so definieren wir für $s \in S$ den Wert $k(s)$ durch

$$k(s) = \max\{0, \max_{t \in T} \Delta t(s)\}.$$

Dann gilt offenbar $m(s) \leq m_0 + rk(s)$ für jedes $s \in S$ und jede Markierung $m \in R(N, m_0)$, womit N im Widerspruch zur Voraussetzung beschränkt wäre.) Somit gibt es eine unendliche Folge von Markierungen. Nach Lemma 3.26 existiert eine monoton wachsende Teilfolge von Markierungen, d.h. es gibt m und m' mit $m_0\,[* > m\,[* > m'$ und $m \leq m'$. Da die Markierungen der Folge sogar verschieden sind, haben wir sogar $m < m'$. □

Aus Satz 3.24 und Satz 3.27 erhalten wir unmittelbar das folgende Kriterium dafür, dass ein Netz nicht beschränkt ist.

Folgerung 3.28 *Für ein Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig.*

i) Das Netz N ist nicht beschränkt.

ii) Es gibt Markierungen m und m' von S mit $m_0\,[q > m$, $m\,[q' > m'$ für gewisse Schaltfolgen $q, q' \in T^*$ und $m < m'$. □

Die Beschränktheit eines Petri-Netzes kann nun wie folgt entschieden werden. Wir konstruieren in einem der Breitensuche ähnlichem Verfahren den Erreichbarkeitsgraphen schrittweise. Bei jedem neu konstruierten Knoten, d.h. jeder neuen Markierung, testen wir noch, ob es auf dem Weg zu dieser Markierung eine kleinere gibt. Ist dies der Fall, so ist das Petri-Netz nach Folgerung 3.28 nicht beschränkt. Werden keine neuen Knoten gewonnen, so ist die Erreichbarkeitsmenge endlich und damit das Petri-Netz beschränkt. Etwas formaler ergibt sich der folgende Algorithmus.

Algorithmus zur Entscheidung, ob ein gegebenes Petri-Netz N beschränkt ist

$v(m)$ ist die Menge der von m verschiedenen Markierungen, von denen aus m erreicht werden kann,
R ist die Menge der bis zu diesem Schritt Algorithmus erhaltenen erreichbaren Markierungen,
R' gibt die Menge der Markierungen, die bei einem Schritt in die Tiefe neu erreicht werden,
B ist die Menge der Kanten im Erreichbarkeitsgraphen,
Akt ist die Menge der Transitionen, die bei der gerade betrachteten Markierung aktiviert sind,

1 $R = \{m_0\};\ B = \emptyset;$
2 $R' = \{m_0\};$
3 WHILE $R' \neq \emptyset$
4 $\quad R' = \emptyset;$
5 $\quad$ FOR $m \in R$
6 $\qquad Akt = \{t \mid t^- \leq m\};$
7 $\qquad$ FOR $t \in Akt$
8 $\qquad\quad m' = m + \Delta(t);$
9 $\qquad\quad$ IF $m' \in R$ THEN $\{B = B \cup \{[m, t, m']\};\ v(m') = v(m) \cup \{m'\} \cup v(m')\}$
10 $\qquad\qquad\qquad$ ELSE $\{R = R \cup \{m'\};\ B = B \cup \{[m, t, m']\};$
11 $\qquad\qquad\qquad\qquad v(m') = v(m) \cup \{m\};\ R' = R' \cup \{m'\}\}$
12 $\quad$ FOR $m \in R$
13 $\qquad$ IF $v(m) \neq \emptyset$ THEN $\{v'(m) = \emptyset;$
14 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ FOR $m' \in v(m)$ $\{v'(m) = v'(m) \cup \cup \{m'\} \cup v(m')\}$
15 $\qquad\qquad\qquad\qquad v(m) = v(m');$
16 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ FOR $m' \in v(m)$
17 $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ IF $m' < m$ THEN {„N ist nicht beschränkt“; HALT}
18 „N ist beschränkt“; HALT

In der ersten Zeile werden die Anfangswerte für R und B gesetzt. Die Setzung in der zweiten Zeile dient nur dem Zweck, dass die WHILE-Schleife durchlaufen werden kann.

In den Zeilen 5–11 werden ausgehend von den schon erreichten Markierungen (dies sind die Elemente von R) die durch eine weitere Schaltung erreichbaren Markierungen m' mit ihren Vormengen $v(m')$ ermittelt. Wird hierbei keine neue Markierung gefunden, so wird die WHILE-Schleife verlassen und ausgegeben, dass N beschränkt ist, da alle (endlich vielen) erreichbaren Markierungen bereits ermittelt wurden.

In den Zeilen 13–15 wird eine Aktualisierung der Mengen $v(m)$ vorgenommen, da in den Zeilen zuvor $v(m'')$ für ein $m'' \in v(m)$ neu berechnet worden sein kann. In den Zeilen 16–17 wird dann getestet ob $v(m)$ eine kleinere Markierung als m enthält. Ist dies der Fall, so ist das Netz nach Folgerung 3.28 nicht beschränkt, und diese Information wird ausgegeben.

Da nach Lemma 3.26 jede unendlich Folge von Markierungen eine monotone Teilfolge enthält, muss entweder $R' = \emptyset$ oder $m' < m$ einmal eintreten.

Wir machen noch eine Bemerkung zur Komplexität des angegebenen Algorithmus. Es ist leicht zu sehen, dass der angegebene Algorithmus polynomial in der Anzahl der erreichbaren Markierungen und der Anzahl der Transitionen ist, da in den einzelnen Schleifen stets nur eine Teilmenge der Markierungen bzw. Transitionen durchlaufen wird. Es ist aber leider festzustellen, dass die Anzahl der erreichbaren Markierungen sogar überexponentiell in der Größe des Netzes ist. In der Arbeit [2] hat M. JANTZEN gezeigt, dass es ein Petri-Netz N mit sieben Stellen, sechs Transitionen und Kanten mit einem Gewicht ≤ 2 derart gibt, dass bei k Marken auf einer der Stellen die maximale Zahl von Marken bei einer erreichbaren Markierung durch $2 \cdot f(k) + 2$ gegeben ist, wobei f eine Funktion mit

$$f(0) = 2 \quad \text{und} \quad f(n+1) = f(n) \cdot 2^{f(n)}$$

ist. Da die Gesamtzahl der Marken damit überexponentiell steigt, muss auch die Anzahl der Markierungen überexponentiell steigen. Damit ist auch die Komplexität unseres Algorithmus überexponentiell, und dies gilt auch für jeden anderen Algorithmus zur Bestimmung der Erreichbarkeitsmenge bzw. des Erreichbarkeitsgraphen.

Wir diskutieren noch kurz die Beschränktheit zweier spezieller Netzgraphen.

Satz 3.29 *i) Jede gewöhnliche Zustandsmaschine $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist beschränkt.*

ii) Ein Kausalnetz $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist genau dann nicht beschränkt, wenn es eine Transition $t \in T$ mit $\bullet t = \emptyset$ und $t\bullet \neq \emptyset$ gibt.

Beweis. i) Nach Definition 2.10 sind Vorbereich und Nachbereich einer jeden Transition einer Zustandsmaschine einelementig, und die Kanten haben bei gewöhnlichen Netzgraphen alle das Gewicht 1. Damit wird durch das Schalten einer Transition die Anzahl der Marken im Netz nicht geändert. Da bei der Anfangsmarkierung eine feste Zahl r von Marken im Netz vorhanden ist, haben alle Markierungen höchstens r Marken. Damit ist jede Stelle r-beschränkt und folglich ist auch N beschränkt.

ii) Wenn es in N eine Transition t gibt, deren Vorbereich leer und deren Nachbereich nicht leer ist, so kann diese Transition beliebig oft hintereinander geschaltet werden und erzeugt auf den Stellen ihres Nachbereichs beliebig viele Marken, womit das Netz nicht beschränkt sein kann.

Gibt es umgekehrt keine derartige Transition, so beginnen alle Pfade im Kausalnetz in Stellen. Von diesen Stellen können folglich durch Schaltungen nur Marken entfernt werden. Wir setzen

$$r = \max\{m_0(s) \mid s \in S\} \quad \text{und} \quad r' = \max\{v(t, s) \mid s \in S, t \in T\}.$$

Da in einem Kausalnetz keine Kreise vorhanden sind, können auf eine Stelle, die von r'' Stellen aus im Netz erreichbar ist, höchstens $r \cdot (r')^{r''}$ Marken geschaltet werden. Damit ist die Anzahl der Marken auf einer Stelle bei allen erreichbaren Markierungen beschränkt. Somit ist auch das Netz beschränkt. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob eine Markierung in einem Netz erreichbar ist. Dies ist das

Erreichbarkeitsproblem

Gegeben: Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ und Markierung m von S

Frage: Ist m von m_0 aus in N erreichbar, d.h. gilt $m \in R(N, m_0)$?

Als erstes wollen wir Vereinfachung dahingehend vornehmen, dass wir uns auf die Erreichbarkeit einer sehr speziellen Markierung, der sogenannten 0-Markierung zurück ziehen können. Dabei ist die 0-Markierung dadurch gegeben, dass sie für jede Stelle den Wert 0 liefert, d.h. im Netz sind keine Marken vorhanden.

Erreichbarkeitsproblem für die 0-Markierung

Gegeben:	Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$
Frage:	Ist die 0-Markierung von m_0 aus in N erreichbar?

Satz 3.30 *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig.*
i) Das Erreichbarkeitsproblem ist entscheidbar.
ii) Das Erreichbarkeitsproblem für die 0*-Markierung ist entscheidbar.*

Beweis. i) $\rightarrow$ ii) ist trivial, da jeder Algorithmus, der das Erreichbarkeitsproblem (für beliebige Markierungen m) löst, auch ein Algorithmus für das Ereichbarkeits der (speziellen) 0-Markierung ist.

ii) $\rightarrow$ i). Wir nehmen an, dass wir einen Algorithmus haben, der für ein beliebiges Petri-Netz entscheidet, ob die 0-Markierung erreicht ist. Ferner seien ein Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ und eine Markierung m von S gegeben. Wir konstruieren nun das Petri-Netz

$$N' = (S \cup \{p^*\}, T \cup \{t^*\}, F', V', m_0')$$

mit

$$\begin{aligned}
&F' = F \cup \{(s, t^*) \mid S \in S\} \cup \{(p^*, t) \mid t \in T\} \cup \{(t, p^*) \mid t \in T\} \cup \{(p^*, t^*)\},\\
&V'(s, t) = V(s, t) \text{ und } V'(t, s) = V(t, s) \text{ für } s \in S, t \in T,\\
&V'(t, p^*) = V'(p^*, t) = 1 \text{ für } t \in T,\\
&V'(s, t^*) = m(s) \text{ für } s \in S \quad \text{und} \quad V'(p^*, t^*) = 1,\\
&m_0'(s) = m_0(s) \text{ für } s \in S \quad \text{und} \quad m_0'(p^*) = 1.
\end{aligned}$$

Falls eine Transition t in N schalten kann, so kann sie auch in N' schalten, wenn die Stelle p^* eine Marke trägt. Bei einem Schalten von t in N' wird die Zahl der Marken auf p^* nicht verändert. Damit haben wir, dass $m_0\,[q > m_1$ in N für $q \in T^*$ genau dann gilt, wenn $m_0'\,[q > m_1'$ in N' gilt, wobei m_1' durch $m_1'(s) = m(s)$ für $s \in S$ und $m_1'(p^*) = 1$ definiert ist. Durch Schalten von Transitionen aus T wird daher die 0-Markierung von N' nicht erreicht, denn p^* hat bei den dadurch erreichbaren Markierungen stets eine Marke.

Falls die Transition t^* in N' geschaltet wird, so entzieht sie p^* eine Marke und weiteres Schalten ist in N' unmöglich. Wird t^* geschaltet, so liegen auf jeder Stelle $s \in S$ mindestens $m(s)$ Marken. Damit wird die 0-Markierung in N' genau dann (durch Schalten von t^*) erreicht, wenn vor dem Schalten in N gerade die Markierung m erreicht wurde. Damit haben wir, dass m genau dann in N erreichbar ist, wenn die 0-Markierung in N' erreicht ist. Da letztere Aussage nach Annahme entscheidbar ist, können wir entscheiden, ob m in N erreichbar ist. □

Das Erreichbarkeitsproblem war lange Zeit offen, bis seine Entscheidbarkeit fast gleichzeitig von H. Müller, S. R. Kosaraju und E. Mayr gezeigt wurde (siehe [3], [5], [4].

Satz 3.31 *Das Erreichbarkeitsproblem ist entscheidbar.* □

Wir verzichten hier auf einen Beweis von Satz 3.31, weil alle bisher bekannten Beweise sehr umfangreich und relativ kompliziert sind. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass das Erreichbarkeitsproblem aus Sicht der Komplexitätstheorie nicht einfacher ist als die Berechnung des Erreichbarkeitsmenge eines beschränkten Petri-Netzes. Damit ist auch das Erreichbarkeitsproblem von überexponentieller Komplexität, d.h. die Algorithmen zu seiner Lösung sind aus praktischer Sicht nicht brauchbar.

Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, m und m' Markierungen von N und $q' \in T^*$ eine Schaltfolge, so dass $m\,[q' > m'$ gilt. Bei der algebraischen Beschreibung des Schaltens hatten wir hergeleitet, dass dann $m' = m + \pi(q')I(N)$ gilt. Falls m erreichbar ist, so gibt es eine Schaltfolge q mit $m_0\,[q > m$. Es gilt also $m = m_0 + \pi(q)I(N)$. Damit ist für die Erreichbarkeit von m notwendig, dass das Gleichungssystem $I(N)^T x = (m - m_0)^T$ eine Lösung besitzt, deren Komponenten alle nicht-negativ und ganzzahlig sind, denn $\pi(q)^T$ ist eine Lösung. Wir machen aber darauf aufmerksam, dass die Existenz einer Lösung mit diesen Eigenschaften nicht sichert, dass m auch erreichbar ist. Dies liegt einfach daran, dass wir mit der Lösung x nur den Parikh-Vektor eines Wortes über T haben. Dieser muss aber einer Schaltfolge entsprechen, d.h., wenn wir annehmen, dass $x = \pi(t_1 t_2 \dots t_n)^T$ gilt, so muss jedes der t_i auch wirklich an der Position schaltbar, also aktiviert sein. Das Durchtesten aller möglichen Anordnungen von Transitionen zu allen Lösungen des obigen Gleicungssystems liefert aber keinen Algorithmus für das Erreichbarkeitsproblem, da es unendlich viele Lösungen mit nicht-negativen ganzzahligen Komponenten geben kann.

Vielfach sind wir aber nicht nur daran interessiert, ob eine Markierung m von der Anfangsmarkierung m_0 aus erreicht werden kann. Wir wollen im positiven Fall, d.h. m ist erreichbar, sogar eine Schaltfolge q erfahren, durch die m_0 in m überführt wird. Dieses Problem ist offenbar nicht leichter als das Erreichbarkeitsproblem selbst. Wenn wir wissen, dass m von m_0 aus erreichbar ist, so lässt sich ein q einfach dadurch finden, dass wir analog der Breitensuche den Erreichbarkeitsgraphen konstruieren (siehe z.B. den Algorithnus auf Seite 34), und wenn zum ersten Mal dabei die Markierung m gefunden wird, so ist im bis dahin konstruierten Graphen sofort ein Wort $q \in T^*$ mit $m_0\,[q > m$ ablesbar. Das Wort q hat sogar minimale Länge unter allen Wörtern $q' \in T^+$ mit $m_0\,[q' > m$. Damit haben wir die folgende Aussage bewiesen.

Satz 3.32 *Es gibt einen Algorithmus, der für eine erreichbare Markierung $m \in R(N, m_0)$ des Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein kürzestes Wort q mit $m_0\,[q > m$ bestimmt.* □

Der oben angegebene Algorithmus lässt sich noch leicht verbessern, indem wir das zu N reverse Netz $N^{-1} = (S, T, F', V, m)$ betrachten, bei dem F' und V' durch die folgenden Bedingungen definiert sind:

$(x, y) \in F'$ gilt genau dann, wenn $(y, x) \in F$ gilt,
$V'(x, y) = V(y, x)$ für alle $(x, y) \in F'$

(intuitiv bedeutet dies, dass die Richtung einer jeden Kante in F umgekehrt wird, wobei das Gewicht nicht verändert wird). Es ist offensichtlich, dass $m'\,[t_1 t_2 \dots t_n > m''$ in N genau dann gilt, wenn $m''\,[t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1 > m'$ in N^{-1} gilt.

Wir konstruieren nun entsprechend der Breitensuche den Erreichbarkeitsgraphen von N und den von N^{-1}. Wenn wir dabei eine Markierung m' finden, die in beiden Bäumen vorkommt, so gelten $m_0\,[q > m'$ und $m\,[q' > m'$. Damit erhalten wir $m_0\,[q > m'\,[(q')^R > m$ (x^R bedeutet dabei das Wort, dass aus dem Wort x durch Umkehrung der Reihenfolge der Buchstaben entsteht; d.h. $\lambda^R = \lambda$ und $(x_1x_2\ldots x_n)^R = x_nx_{n-1}\ldots x_1$ für Buchstaben x_i, $1 \leq i \leq n$). Folglich ist $q(q')^R$ eine Schaltfolge, die m_0 in m überführt. Wenn wir das erste auftretende m' mit obigen Eigenschaften verwenden, ist die Schaltfolge $q(q')^R$ sogar von minimaler Länge.

Dieses Vorgehen ist deshalb etwas günstiger, weil wir bei der Breitensuche weniger Schichten in den beiden Bäumen durchlaufen und die Breite der Schichten gewöhnlich stark zunimmt.

3.3 Lebendigkeit

Wir wollen nun das Konzept der Lebendigkeit untersuchen, das intuitiv dadurch beschrieben werden kann, dass jede Transition nach jedem gegebenen Zeitpunkt wieder einmal geschaltet werden kann.

Definition 3.33 *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz.*

i) Eine Markierung m von S heißt tot *in N, wenn keine Transition $t \in T$ bei m aktiviert ist.*

ii) Eine Transition $t \in T$ heißt tot bei der Markierung *m, wenn von m aus keine Markierung erreicht werden kann, bei der t aktiviert ist.*

iii) Eine Transition $t \in T$ wird lebendig bei der Markierung *m genannt, wenn sie bei keiner von m aus erreichbaren Markierung tot ist.*

iv) Eine Markierung m von S wird lebendig in *N genannt, wenn alle Transitionen aus T bei m lebendig sind.*

v) Das Petri-Netz N heißt lebendig*, wenn seine Anfangsmarkierung m_0 lebendig in N ist.*

vi) Wir nennen das Petri-Netz N verklemmungsfrei*, falls in N keine tote Markierung erreichbar ist.*

Falls die Markierung, bei der die Eigenschaft, lebendig bzw. tot zu sein, die Anfangsmarkierung m_0 ist, so lassen wir häufig den Zusatz „bei m_0“ einfach fort und sprechen von lebendig bzw. tot schlechthin.

Wir geben einige Beispiele zu den vorstehend definierten Konzepten.

Beispiel 3.34 Zuerst betrachten wir wieder das Petri-Netz N_5 aus Abbildung 3.1. Offensichtlich ist keine Markierung aus $R(N_5, m_0)$ tot, denn wie dem Erreichbarkeitsgraphen (siehe Abbildung 3.2) zu entnehmen ist, ist bei jeder Markierung mindestens eine Transition aktiviert. Außerdem ist jede Transition bei jeder erreichbaren Markierung lebendig, denn beim Durchlauf des nächsten Zyklus $t_1t_2t_3$ bzw. $t_1t_3t_2$ wird jede Transition erneut aktiviert. Damit ist das Petri-Netz N_5 ebenfalls lebendig.

Beispiel 3.35 Wir betrachten das Petri-Netz N_6, das zusammen mit seinem Erreichbarkeitsgraphen in Abbildung 3.5 gegeben ist. Wir stellen fest, dass N_6 verklemmungsfrei ist,

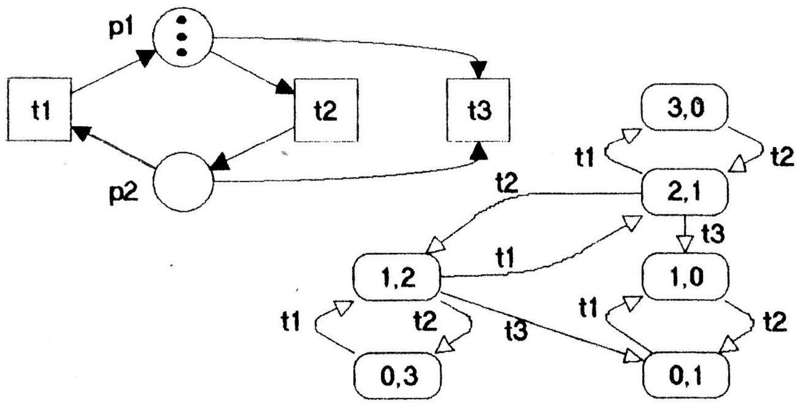


Abbildung 3.5: Petri-Netz N_6

denn bei jeder erreichbaren Markierung lässt sich mindestens eine Transition schalten. Die Transitionen t_1 und t_2 sind lebendig, denn ausgehend von jeder Markierung ist die Schaltfolge $t_1 t_2$ oder $t_2 t_1$ schaltbar, womit gezeigt ist, dass sowohl t_1 als auch t_2 von jeder Markierung aus wieder aktiviert werden können. Die Transition t_3 dagegen ist tot, denn nach einmaligen Schalten von t_3 wird die Markierung $(1, 0)$ oder die Markierung $(0, 1)$ erreicht, bei denen t_3 nicht aktiviert ist. Außerdem werden durch Schalten von t_1 bzw. t_2 diese beiden Markierungen jeweils nur in die andere überführt, womit t_3 nicht wieder aktiviert kann.

Wir verändern nun N_6 dadurch, dass wir die Anfangsmarkierung ändern. Das Petri-Netz N_6' habe die gleichen Mengen von Stellen, Transitionen und Kanten und die gleichen Gewichte für die Kanten wie N_6, aber die Anfangsmarkierung $m_0' = (2, 0)$. Durch Schalten von t_2 erreichen wir dann die Markierung $(1, 1)$, bei der t_3 aktiviert ist. Durch Schalten von t_3 erhalten wir die Markierung $(0, 0)$, die offenbar tot ist. Damit ist N_6' nicht verklemmungsfrei. Außerdem ist in N_6' keine der Transitionen lebendig.

Beispiel 3.36 Der im vorhergehenden Beispiel auftauchende Effekt, dass Lebendigkeit bei einer Senkung der Markenzahl verlorengehen kann, ist nicht unbedingt verwunderlich, denn je mehr Marken vorhanden sind, um so eher ist eine Transition aktivierbar. Dass diese Intuition trügerisch ist, wird aus dem Petri-Netz N_7 aus Abbildung 3.6 ersichtlich. Als erstes stellen wir fest, dass bei der Anfangsmarkierung $m_0 = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ nur t_3 aktiviert ist. Durch Schalten von t_3 erhalten wir $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$. Nun ist nur t_1 aktiviert, und deren Schaltung liefert $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. Wir fahren so fort und erhalten den Erreichbarkeitsgraphen

$$\begin{tikzcd}(1,0,1,1,0,0,0) \arrow[r, "t_3"] & (1,0,0,0,1,1,0) \arrow[r, "t_1"] & (0,1,1,0,1,0,0) \arrow[r, "t_4"] & (0,1,0,1,0,0,1 \arrow[lll, bend left, "t_2"]\end{tikzcd}$$

Damit ist das Netz N_7 lebendig, denn die vier erreichbaren Markierungen werden zyklisch durchlaufen, und in jedem Zyklus wird jede Transition des Netzes genau einmal geschaltet, d.h. bei jedem Zyklusdurchlauf wird jede Transition genau einmal aktiviert.

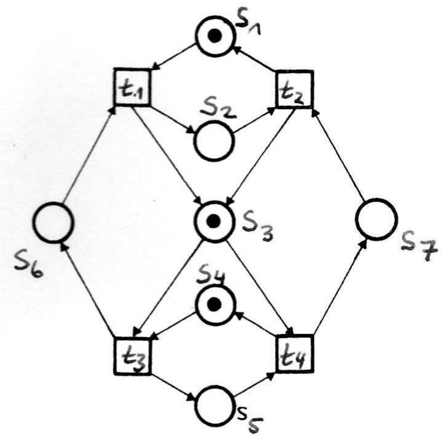


Abbildung 3.6: Petri-Netz N_7

Wir verändern wieder nur die Anfangsmarkierung, um N_7' zu erhalten. Bei N_7' sei die Anfangsmarkierung $m_0' = (1,0,1,1,1,0,0)$, d.h. gegenüber der Anfangsmarkierung von N_6 haben wir die Stelle s_5 zusätzlich mit einer Marke versehen. Dann kann t_4 geschaltet werden, wodurch wir die tote Markierung $(1,0,0,2,0,0,1)$ erhalten. Damit ist N_7' nicht verklemmungsfrei, und alle Transitionen von N_7' sind nicht lebendig.

Aus Definition 3.33 folgen sofort die folgenden Aussagen.

Folgerung 3.37 *Es sei $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz.*
i) Wenn N lebendig ist, so ist N verklemmungsfrei.
ii) Die Transition $t \in T$ ist genau dann lebendig bei einer Markierung m in N, wenn von jeder Markierung m', die von m erreicht werden kann, eine Markierung m'' erreicht werden kann, bei der t aktiviert ist.
iii) Wenn $t \in T$ lebendig (bzw. tot) bei m in N ist, dann ist t auch bei allen von m in N erreichbaren Markierungen lebendig (bzw. tot).
iv) Wenn das Petri-Netz N nicht verklemmungsfrei ist, dann besitzt N keine lebendige Transition. □

Die Lebendigkeit von t bei m kann auch wie folgt interpretiert werden. Für jede Schaltfolge q für m, durch deren Anwendung m' erreicht wird, gibt es eine Schaltfolge $q't$ für m', d.h. jede gegebene Schaltfolge kann so verlängert werden, dass t in der Verlängerung vorkommt.

Ebenfalls aus Definition 3.33 folgt sofort die folgende Aussage.

Folgerung 3.38 *Wenn in einem Petri-Netz N die Transition t (bei m) tot ist, so ist t nicht lebendig (bei m).* □

Die Umkehrung von Folgerung 3.38 gilt nicht. Um das einzusehen betrachten wir das Petri-Netz N_6' aus Beispiel 3.35. Durch Schalten von t_3 kann aus m_0' eine tote 0-Markierung erreicht werden. Folglich ist t_2 nicht lebendig bei m_0'. Sie ist aber auch nicht tot bei m_0', denn es gibt von m_0' ausgehend erreichbare Markierungen, in denen t_2 geschaltet werden kann, z.B. m_0' selbst.

Satz 3.39 *Jedes lebendige und beschränkte Petri-Netz ist stark zusammenhängend.*

Beweis. Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und x und y zwei Knoten von $S \cup T$. Wir haben zu zeigen, dass es einen gerichteten Weg von x nach y gibt. Aufgrund des Zusammenhangs, den wir grundsätzlich annehmen, gibt es einen ungerichteten Weg von x nach y. Dieser sei durch die Knoten $x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ gegeben. Es gilt also $(x_i, x_{i+1}) \in F$ oder $(x_{i+1}, x_i) \in F$. Wenn immer (x_i, x_{i+1}) gilt, so ist der Weg gerichtet, und wir sind fertig. Auch wenn für jede Kante $(x_{i+1}, x_i) \in F$ mit $(x_i, x_{i+1}) \notin F$ ein Weg gerichteter Weg w_i von x_i nach x_{i+1} existiert, erhalten wir durch Ersetzen von (x_{i+1}, x_i) durch w_i einen gerichteten Weg von x nach y.

Daher bleibt der Fall zu untersuchen, dass $(x_{i+1}, x_i) \in F$ und $(x_i, x_{i+1}) \notin F$ gelten und kein gerichteter Weg von x_i nach x_{i+1} existiert. Es seien $Vor(x_{i+1})$ die Menge aller Knoten, von denen aus ein gerichteter Weg zu x_{i+1} führt (wobei $x_{i+1} \in Vor(x_{i+1})$ gelte) und $Nach(x_i)$ die Menge aller Knoten, zu denen ein gerichteter Weg von x_i führt (wobei $x_i \in Nach(x_i)$ gelte). Nach Voraussetzung gilt $Vor(x_{i+1}) \cap Nach(x_i) = \emptyset$.

Wenn x_{i+1} eine Transition ist, so ist x_i eine Stelle. Da x_{i+1} lebendig ist, kann x_{i+1} beliebig oft geschaltet werden. Dabei werden wegen $Vor(x_{i+1}) \cap Nach(x_i) = \emptyset$ keine Marken von x_i abgezogen. Damit können auf x_i beliebig viele Marken geschaltet werden. Dies widerspricht der vorausgesetzten Beschränktheit des Netzes.

Wenn x_{i+1} eine Stelle ist, so ist x_i eine Transition. Da x_i lebendig ist, müssen auf x_{i+1} immer wieder so viel Marken geschickt werden können, wie x_i erfordert. Wegen $Vor(x_{i+1}) \cap Nach(x_i) = \emptyset$ werden für das Schalten der Marken auf x_{i+1} die Marken der Stellen aus $x_i\bullet$ nicht benötigt. Damit ist die Stelle x_{i+1} nicht beschränkt im Gegensatz zur Voraussetzung.

Damit kann zuletzt betrachtete Fall nicht eintreten, womit die Existenz eines gerichteten Weges von x nach y in allen Fällen gezeigt ist. $\square$

Die Umkehrung von Satz 3.39 gilt nicht, wie die beiden Netzgraphen aus Abbildung 3.7 zeigen. Es ist sofort zu sehen, dass in beiden Netzgraphen von jedem Knoten zu jedem Kno-

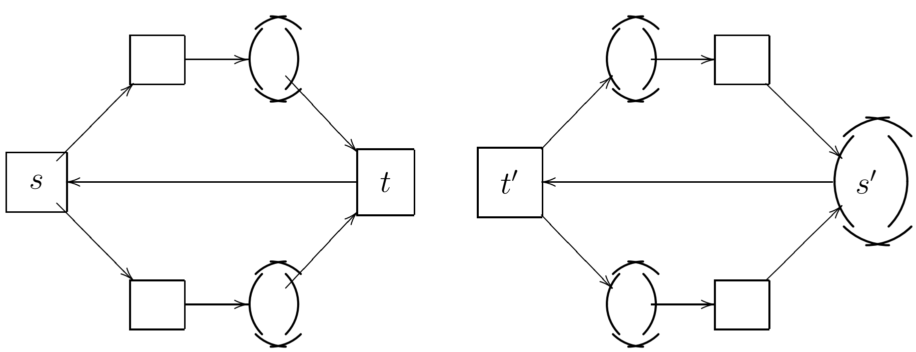


Abbildung 3.7: Stark zusammenhängende Netzgraphen, deren Petri-Netze nicht lebendig bzw. nicht beschränkt sind

ten ein gerichteter Weg führt (man bemerke, dass das eine Netz in das andere übergeht, indem man Transitionen und Stellen vertauscht). Das linke Netz ist aber bei beliebiger Anfangsmarkierung beschränkt aber nicht lebendig. Das liegt daran, dass die Transition t zwei Marken verbraucht, aber nur eine produziert. Folglich ist die maximale Anzahl von Marken bei der Anfangsbelegung gegeben. Da die beiden anderen Transitionen aber nicht beliebig oft hintereinander schalten können (höchstens so oft, wie Marken auf s liegen), wird t immer wieder geschaltet, bis eine tote Markierung erreicht wird.

Das rechte Netz dagegen ist bei beliebiger Anfangsmarkierung lebendig, aber nicht beschränkt. Dies folgt daraus, dass bei Existenz einer Marke im Netz, diese auf die Stelle s' gebracht werden kann und dann t' geschaltet wird. Die Transition t' verbraucht aber nur eine Marke und produziert zwei Marken. Folglich steigt die Anzahl der Marken im Netz über jede Schranke und alle Transitionen sind lebendig.

Wenn wir Satz 3.29 i) beachten, so zeigt der folgende Satz, dass die Umkehrung von Satz 3.39 aber für gewöhnliche Zustandsmaschinen gilt.

Satz 3.40 *Eine gewöhnliche Zustandsmaschine $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist genau dann lebendig, wenn sie stark zusammenhängend ist und m_0 nicht der Nullvektor ist (d.h. mindestens eine Marke im Netz ist).*

Beweis. Es sei zuerst die gewöhnliche Zustandsmaschine lebendig. Dann kann m_0 nicht die 0-Markierung sein, da bei der 0-Markierung alle Transitionen tot sind. Nach Satz 3.29 ist die Zustandsmaschine beschränkt. Aus Satz 3.39 folgt nun, dass die Zustandsmaschine stark zusammenhängend ist.

Es sei nun N eine stark zusammenhängende Zustandsmaschine, deren Anfangsmarkierung nicht die 0-Markierung ist. Dann gibt es eine Stelle $s \in S$ mit $m_0(s) > 0$. Es sei nun s' eine weitere Stelle. Wegen des starken Zusammenhangs gibt es einen gerichteten Weg von s nach s' Durch Schalten aller Transitionen auf diesem Weg, wird eine Marke von s nach s' transportiert. Dies bedeutet, dass wir erreichen können, dass eine Marke von einem beliebigen Platz zu einem anderen beliebigen Platz bewegt werden kann. Damit kann jede Transition stets wieder aktiviert werden, indem man die Marke immer wieder auf den Vorbereich der Transition bringt. Folglich sind jede Transition und damit N lebendig. □

Auch für gewöhnliche Synchronisationsgraphen und Kausalnetze haben wir eine Charakterisierung der Lebendigkeit.

Satz 3.41 *Ein Kausalnetz $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist genau dann lebendig, wenn es keine Stelle $s \in S$ mit $\bullet s = \emptyset$ und $s\bullet \neq \emptyset$ gibt.*

Beweis. Wenn eine derartige Stelle s existiert, so können die Transitionen aus $s\bullet$ höchstens $m_0(s)$-mal schalten. Diese Transitionen sind also nicht lebendig, womit auch das Netz nicht lebendig sein kann.

Es existiere nun keine deratige Stelle. Da es in einem Kausalnetz keine Kreise gibt, sind alle Knoten mit leerem Vorbereich Transitionen. Diese können nun stets schalten und dadurch soviel Marken in das Netz geben, wie für das Schalten anderer Transitionen erforderlich ist. Daher sind alle Transitionen lebendig. □

Satz 3.42 *Ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph $N = (S, T, F, V, m_0)$ ist genau dann lebendig, wenn es in jedem (gerichteten) Kreis in N mindestens eine Stelle p mit $m_0(p) > 0$ gibt (d.h. jeder Kreis enthält mindestens eine Marke).*

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass sich die Anzahl der Marken in einem Kreis K des Netzgraphen von N durch (mehrfaches) Schalten nicht ändert. Dies ist wie folgt zu sehen. Wenn $t \in T$ nicht im Kreis K liegt, so gelten $\bullet t \cap K = t \bullet \cap K = \emptyset$. Folglich wird die Anzahl der Marken im Kreis durch das Schalten von t nicht verändert. Wenn $t \in T$ in K liegt, so sind $\bullet t \cap K$ und $t \bullet \cap K$ einelementig. Da N ein gewöhnliches Netz ist, wird also genau eine Marke von genau einer Stelle des Vorbereichs von t genommen und auf genau eine Stelle im Nachbereich von t abgelegt. Daher ändert sich auch in diesem Fall die Anzahl der Marken im Kreis K nicht.

Wir nehmen zuerst an, dass N lebendig ist. Angenommen, es gibt einen (gerichteten) Kreis K, in dem bei der Anfangsmarkierung keine Marke liegt. Wegen der vorstehenden Bemerkung sind dann bei keiner erreichbaren Markierung Marken im Kreis K. Dann kann keine Transition in K schalten, d.h. die Transitionen von K sind tot. Dies widerspricht unserer Voraussetzung.

Es sei nun ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph gegeben, in dem jeder Kreis bei der Anfangsmarkierung mindestens eine Marke trägt. Es sei t eine beliebige Transition. Für jede erreichbare Markierung $m \in R(N, m_0)$ definieren wir die Menge P_m als die Menge aller Stellen s, von denen ein gerichteter Weg von s nach t existiert, auf dem keine Marken liegen. Wir beweisen nun durch Induktion über die Mächtigkeit von P_m, dass es eine Schaltfolge q für m gibt, durch deren Schalten t aktiviert wird.

Es sei $\#(P_m) = 0$. Dann ist P_m die leere Menge, und daher liegt auf jeder Stelle aus $\bullet t$ mindestens eine Marke. Somit ist t aktiviert (es gilt $q = \lambda$).

Es sei $\#(P_m) > 0$. Wir wählen nun die Stelle s so, dass dass der Weg von s nach t maximale Länge hat. Die Existenz einer solchen Stelle s ist wie folgt einzusehen: Da bei m_0 auf jeden Kreis mindestens eine Marke liegt, ist dies nach der Bemerkung zu Beginn dieses Beweises auch für m der Fall, und daher ist die Länge der Wege ohne Marken beschränkt. Es sei $\{t'\} = \bullet s$. Wegen der Maximalität der Weglänge, muss $m(s') > 0$ für jede Stelle aus $\bullet t'$ gelten. Damit ist t' aktiviert. Durch Schalten von t' entstehe m'.

Es sei $s'' \in P_{m'}$. Dann gilt $m(s'') = 0$. Wenn $s'' \notin \bullet t'$ gilt, so haben wir $m(s'') = m'(s'') = 0$, und jeder Weg von s'' nach t, der bei m' keine Marken hat, hat auch bei m keine. Dies bedeutet $s'' \in P(m)$. Wenn $s'' \in \bullet t'$, so gilt $\{t'\} = s''\bullet$. Da t' geschaltet wurde, ist jede Stelle im Nachbereich von t' mit einer Marke belegt, womit gezeigt ist, dass es keine markenlosen Weg von s'' nach t bei m' gibt. Folglich gilt $P_{m'} \subseteq P_m$. Da überdies $s \in P_m$ und $s \notin P_{m'}$ gelten, ist sogar $P_{m'} \subset P_m$. Damit gilt auch $\#(P_{m'}) < \#(P_m)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun eine Schaltfolge q für m, durch die t aktiviert wird. Damit ist $t'q$ eine Schaltfolge für m durch die t aktiviert wird.

Damit haben wir gezeigt, dass t bei jeder erreichbaren Markierung m lebendig ist, womit N als lebendig nachgewiesen ist. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob die Lebendigkeit und Verklemmungsfreiheit eines Netzes entscheidbar ist.

Satz 3.43 *Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent.*

i) Für ein gegebenes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ und eine gegebene Markierung m von N ist es entscheidbar, ob m von m_0 aus erreichbar ist (d.h. ob $m \in R(N, m_0)$ gilt).

ii) Für ein gegebenes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ und eine Transition $t \in T$ ist es entscheidbar, ob t lebendig ist. □

Wir verzichten auf einen Beweis dieses Satzes, da er sehr umfangreich ist. Aber wir merken an, dass er so geführt wird, dass aus einem Algorithmus für eines der Probleme einer für das andere Problem konstruiert wird. Damit sind beide Probleme aus komplexitätstheoretischer Sicht gleich schwer.

Aus Satz 3.31 folgt damit sofort die folgende Aussage.

Folgerung 3.44 *Für ein gegebenes Petri-Netz ist es entscheidbar, ob es lebendig ist.* □

Wegen der Bemerkung nach Satz 3.43 ist auch die Entscheidung der Lebendigkeit eines Netzes nur in überexponentieller Zeit möglich.

Satz 3.45 *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig.*

i) Für ein gegebenes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ und eine gegebene Markierung m von N ist es entscheidbar, ob m von m_0 aus erreichbar ist (d.h. ob $m \in R(N, m_0)$ gilt).

ii) Für ein gegebenes Netz ist es entscheidbar, ob es verklemmungsfrei ist.

Beweis. Wir beweisen nur den Teil ii) $\rightarrow$ i); der Beweis für i) $\rightarrow$ ii) erfolgt ähnlich zu dem von i) $\rightarrow$ ii) aus Satz 3.43 und wird auch hier wegen seines Umfangs fortgelassen.

Wegen Satz 3.30 reicht es zu zeigen, dass aus der Existenz eines Algorithmus, der die Verklemmungsfreiheit entscheidet, ein Algorithmus zur Entscheidung der Erreichbarkeit der 0-Markierung folgt.

Es seien also ein Algorithmus zur Entscheidung der Verklemmungsfreiheit bei einem beliebigen Netz und ein Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ gegeben. Wir konstruieren das Petri-Netz

$$N' = (S \cup \{s^*\}, T \cup \{t_s \mid s \in S\} \cup \{t^*\}, F', V', m'_0)$$

mit

$$\begin{aligned}
&F' = F \cup \{(s, t_s) \mid s \in S\} \cup \{(t_s, s) \mid s \in S\} \cup \{(t, s^*) \mid t \in T\} \\
&\qquad\qquad \cup \{(s^*, t) \mid t \in T\} \cup \{(s^*, t^*)\} \\
&V'(t, s) = V(t, s) \text{ und } V'(t, s) = V(t, s) \text{ für } s \in S, t \in T, \\
&V'(s, t_s) = V'(t_s, s) = V'(t, s^*) = V'(s^*, t) = V'(s^*, t^*) = 1 \text{ für } s \in S, t \in T, \\
&m'_0(s) = m_0(s) \text{ für } s \in S \quad \text{und} \quad m'_0(s^*) = 1.
\end{aligned}$$

Wegen der Existenz der Schleifen zwischen einer jeden Stelle s und der zugehörigen neuen Transition t_s gibt es stets eine Transition t_s, die aktiviert ist, wenn auf einer Stelle $s \in S$ eine Marke liegt. Ferner kann eine Transition $t \in T$ in N' nur schalten, wenn sie in N schalten kann und mindestens eine Marke auf s^* liegt. Wegen der Schleifen zwischen den Transitionen aus T und s^* bleibt die Marke aus der Anfangsmarkierung stets auf s^* liegen, solange nur Transitionen aus T geschaltet werden. Wird t^* geschaltet, so kann keine Transition aus T mehr geschaltet werden, da die Marke auf s^* entfernt wurde. Somit hat N' genau dann eine tote Markierung, wenn in N die 0-Markierung erreichbar ist (dann kann in N' die tote Markierung durch Schalten von t^* erreicht werden; ansonsten kann mindestens eine Transition t_s, $s \in S$ schalten). Da wir die Verklemmungsfreiheit von N' entscheiden können, ist die Existenz einer toten Markierung von N' auch entscheidbar. Folglich können wir entscheiden, ob in N die 0-Markierung erreicht werden kann. □

Folgerung 3.46 *Es ist für ein Petri-Netz entscheidbar, ob es verklemmungsfrei ist.* □

Aufgrund unseres Beweises von Satz 3.45 ist die Entscheidbarkeit der Verklemmungsfreiheit mindestens so kompliziert wie die des Erreichbarkeitsproblems, d.h. Verklemmungsfreiheit ist nur mit überexponentiellem Zeitaufwand entscheidbar.

Satz 3.47 *Für ein gegebenes Petri-Netz N, eine Markierung m und eine Transition t ist es entscheidbar, ob t bei m tot ist.*

Beweis. Für den Wert ω (der Unendlichkeit repräsentiert) definieren wir folgende Regeln

$$\omega + \omega = \omega + n = n + \omega = \omega - n = \omega \text{ und } n < \omega \text{ für } n \in \mathbf{N}_0.$$

Wir konstruieren den Erreichbarkeitsgraphen von N wie im Algorithmus auf Seite 34 mit folgender Modifikation in Zeile 17:

IF $m' \leq m$ THEN $\{Q = \{s \mid m'(s) < m(s)\};\ m(s) = \begin{cases} \omega & \text{falls } s \in Q \\ m(s) & \text{sonst} \end{cases} \}$

Dies ist darin begründet, dass wir wie im Beweis von Satz 3.24 zeigen können, dass es zu jedem $x \in \mathbf{N}$ eine erreichbare Markierung m'' mit $m''(s) \geq x$ für $x \in Q$ gibt. Der so konstruierte „Erreichbarkeitsgraph“ ist wegen Lemma 3.26 endlich.

Nun gilt, dass t aktiviert ist, wenn $t^- \leq m$ gilt. (Wenn m den Wert ω an einer Stelle s hat, lässt sich eine hinreichend große Anzahl von Marken auf s erreichen, womit die Aktiviertheit auch bei Markierungen mit dem Wert ω in gewissen Komponenten gilt.) Um festzustellen, ob t bei m tot ist, haben wir nur die von m aus erreichbaren Markierungen m' durchzumustern, ob eine von ihnen $t^- \leq m'$ erfüllt. □

3.4 Reduktionen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Transformationen von Netzen behandeln, bei denen die Anzahl der Stellen und/oder Transitionen gesenkt wird. Dabei wird aber gesichert, dass das Ausgangsnetz und das durch die Transformation erhaltene Netz im Wesentlichen die gleichen Eigenschaften haben. Die Überprüfung, ob eine Eigenschaft vorliegt oder nicht, kann aber wegen der Verkleinerung der Knotenzahl unter Umständen einfacher sein. Zum Beispiel erfordert die Bestimmung des Erreichbarkeitsgraphen für jede Transition t und jede erreichbare Markierung einen Test, ob t bei m aktiviert ist, und die Bestimmung der durch Schalten von t aus m entstehenden Markierung. Offensichtlich wird der Aufwand geringer, wenn die Transitionszahl verringert wird.

Im Folgenden sei das Petri-Netz N immer als $N = (S, T, F, V, m_0)$ gegeben. Durch die Transformation entsteht dann ein Petri-Netz, das immer durch $N' = (S', T', F', V', m_0')$ beschrieben wird. Die genaue Spezifikation von S', T', F', V' und m_0' wird stets durch eine Regel beschrieben, durch die gewisse Knoten (und alle Kanten von und zu diesen Knoten) gestrichen werden und gewisse Knoten mit ihren Kanten neu hinzugefügt werden. Dabei wird angenommen, dass für die nicht gestrichenen Kanten das Gewicht und für die nicht gestrichenen Stellen der Wert der Anfangsmarkierung ohne Änderung übernommen werden. Jede dieser Regeln wird dadurch beschrieben, dass zuerst Voraussetzungen angegeben werden, die ein Netz erfüllen muss, damit die Regel angewendet werden kann, und dann die Anwendung der Regeln angegeben wird, d.h. es wird gesagt, welche Knoten gestrichen und welche Knoten und Kanten neu eingeführt werden.

Die uns interessierenden Eigenschaften werden Beschränktheit und Lebendigkeit sein.

Regel 1:
Voraussetzung: *Die Menge U der Transitionen $t \in T$ mit $\bullet t = \emptyset$ ist nicht leer.*
Anwendung: *Streiche alle Transitionen $t \in U$ und alle Stellen aus $t\bullet$ mit $t \in U$.*

Ein Beispiel für die Anwendung von Regel 1 ist in Abbildung 3.8 gegeben.

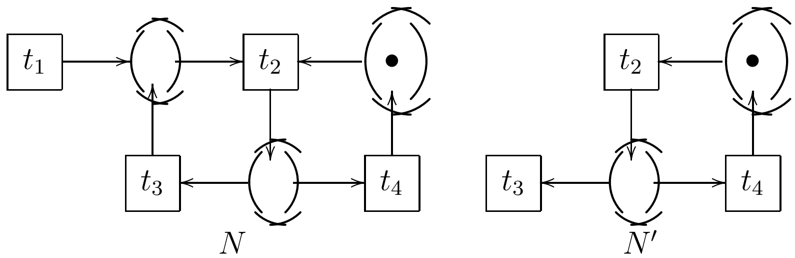


Abbildung 3.8: Beispiel zur Transformation durch Regel 1

Wir bemerken zuerst einige Fakten, die aus der Voraussetzung zur Regel 1 folgen.

Lemma 3.48 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 1.*
i) Alle durch Regel 1 gestrichenen Stellen sind unbeschränkt.
ii) Das Netz N ist nicht beschränkt.
iii) Alle durch Regel 1 gestrichenen Transitionen sind lebendig.
iv) Wenn N' leer ist, dann ist N lebendig.

Beweis. i) Eine Stelle wird bei Regel 1 genau dann gestrichen, wenn sie im Nachbereich einer gestrichenen Transition t liegt. Eine gestrichene Transition hat aber einen leeren Vorbereich. Deshalb kann eine gestrichene Transition stets schalten, und damit beliebig viele Marken auf die Stellen ihres Nachbereichs schalten.

ii) Da die bei Regel 1 gestrichenen Stellen in N unbeschränkt sind, ist N selbst auch nicht beschränkt.

iii) wurde bei i) bereits bewiesen.

iv) Wenn N' leer ist, so werden alle Transitionen von N bei Regel 1 gestrichen. Damit sind alle Transitionen von N wegen iii) lebendig. □

Satz 3.49 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 1. Dann ist N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist.*

Beweis. Es sei N lebendig. Ferner seien $t' \in T'$ eine Transition in N' und $m' \in R(N', m'_0)$ eine in N' erreichbare Markierung. Die Schaltfolge für m'_0, durch die m'_0 in m' überführt wird sei q'. Dann ist q' ein Wort über T'. Allerdings wird für die Aktiviertheit von einer in q' vorkommenden Transition t'_1 nur gefordert, dass $(t'_1)^- \leq m'_1$ gilt, wobei m'_1 die Markierung ist, die durch das Schalten der Buchstaben vor dem Vorkommen von t'_1 erreicht wird. Falls $\bullet t'$ auch in N eine Teilmenge von S' ist, so kann t' auch in N bei m'_1 geschaltet werden.

Enthält dagegen $\bullet t'$ eine Stelle aus $S \setminus S'$, so muss diese mit hinreichend vielen Marken ausgestattet sein, damit t' auch in N schalten kann. Die gestrichenen Stellen können aber mit beliebig vielen Marken bestückt werden, indem man die Transitionen aus $T \setminus T'$ schaltet (vgl. Beweis von Lemma 3.48 i)). Daher können wir eine Schaltfolge $q \in (T \setminus T')^*$ für m_0 angeben, die dafür sorgt, dass auf allen Stellen von $S \setminus S'$ genügend Marken liegen und damit sichert, dass eine Transition aus q' sowohl in N als auch N' geschaltet werden kann. Es sei $m_0\,[qq' > m$. Offenbar stimmen m und m' auf allen Stellen von $S \setminus S'$ überein. Da N nach Voraussetzung lebendig ist, gibt es eine Schaltfolge q_1 für m derart, dass t' bei m_1 aktiviert ist, wobei $m\,[q_1 > m_1$ gilt. Wir können annehmen, dass $q_1 = q_2 q_3$ mit $q_1 \in (T \setminus T')^*$ und $q_3 \in (T')^*$ gelten, da wir die Transitionen aus $T \setminus T'$ zu einem beliebigen Zeitpunkt ausführen können und folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle zu Beginn schalten können. Dann ist q_3 auch eine Schaltfolge für m' und t' aktiviert bei m'_1 mit $m'\,[q_3 > m'_1$. Damit ist gezeigt, dass t' in N' lebendig ist. Da t' beliebig ist, sind alle Transitionen aus T' lebendig. Damit ist N' lebendig.

Mittels analoger Überlegungen beweist man auch, dass aus der Lebendigkeit von N' die Lebendigkeit von N folgt. □

An einer zu Satz 3.49 analogen Aussage hinsichtlich der Beschränktheit sind wir nicht interessiert, da wir aufgrund von Lemma 3.48 ii) wissen, dass N nicht beschränkt ist. Dadurch ist eine Reduktion zu N' und die Untersuchung von N' auf Beschränktheit nicht mehr erforderlich. Wir bemerken aber, dass N' beschränkt sein kann, obwohl N unbeschränkt ist, wie das Beispiel in Abbildung 3.8 zeigt.

Die aus Regel 1 durch Vertauschen von Stellen und Transitionen entstehende Regel ist

Regel 1a:

Voraussetzung:	*Die Menge U der Stellen $s \in S$ mit $\bullet s = \emptyset$ ist nicht leer.*
Anwendung:	*Streiche alle Stellen $s \in U$ und alle Transitionen aus $s\bullet$ mit $s \in U$.*

Wie man leicht feststellt, gelten die zu Lemma 3.48 ähnlichen Aussagen.

Lemma 3.50 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 1a.*

i) Alle durch Regel 1a gestrichenen Transitionen sind nicht lebendig.

ii) Das Netz N ist nicht lebendig.

iii) Alle durch Regel 1a gestrichenen Stellen sind beschränkt.

iv) Wenn N' leer ist, dann ist N beschränkt. □

Damit brauchen wir Lebendigkeit nicht weiter zu betrachten, da sie bei N nicht gegeben ist. Allerdings kann durch die Transformation durch Regel 1a ein unbeschränktes Netz in ein beschränktes Netz überführt werden, wie aus Abbildung 3.9 zu ersehen ist. Das Ausgangsnetz ist nicht beschränkt, da bei Schalten von t_1 eine Marke auf s_1 gebracht werden kann, die durch Schalten von t_2 und t_4 zu zwei Marken auf s_2 führt. Eine davon kann durch Schalten von t_3 wieder auf s_1 gebracht werden, wodurch zwei weitere Marken auf s_2 gebracht werden können. Daher ist s_2 (und wie man sich leicht überlegt auch die anderen nach dem Streichen verbleibenden Stellen) nicht beschränkt in N. Das durch Anwendung der Regel entstehende Netz ist aber beschränkt, da keine Transition schaltbar ist.

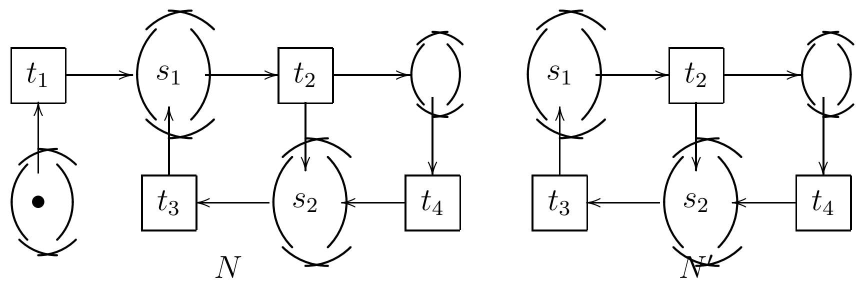


Abbildung 3.9: Beispiel zur Transformation durch Regel 1a

Es ist offensichtlich, dass N' in Abbildung 3.9 beschränkt ist, weil durch die Anwendung der Regel alle Marken aus dem Netz entfernt wurden. Es ist daher zu sichern, dass die Marken auf den gestrichenen Plätzen in N nicht genutzt werden können. Dies wird durch Regel 2 gesichert.

Regel 2:

Voraussetzung:	*Die Menge U der Stellen $s \in S$ mit $\bullet s = \emptyset$ ist nicht leer,*
Anwendung:	*Streiche alle Stellen $s \in U$, für die $m_0(s) < V(s,t)$ für alle Transitionen $t \in s\bullet$ gilt, und für jede gestrichene Stelle s streiche alle Transitionen aus $s\bullet$.*

Aufgrund der Voraussetzung $m_0(s) < V(s,t)$ für jede gestrichene Stelle $s \in U$ und jede Transition $t \in \bullet s$ kann keine der Transitionen aus $s\bullet$ in N schalten und die Markenzahl auf den gestrichenen Stellen $s \in U$ bleibt bei jedem Schalten einer Transition in N unverändert. Daher stimmen die erreichbaren Markierungen von N und N' auf den nicht gestrichenen Stellen überein. Hieraus ergeben sich sofort die folgenden Aussagen.

Lemma 3.51 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 2.*

i) Alle durch Regel 2 gestrichenen Transitionen sind nicht lebendig.

ii) Das Netz N ist nicht lebendig.

iii) Alle durch Regel 2 gestrichenen Stellen sind beschränkt.

iv) Wenn N' leer ist, dann ist N beschränkt. □

Satz 3.52 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 2. Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.* □

Für die nächste Regeln brauchen den Begriff der Parallelität von Knoten.

Definition 3.53 *i) Zwei Stellen s_1 und s_2 heißen parallel im Netz N, wenn $s_1\bullet = s_2\bullet$ und $\bullet s_1 = \bullet s_2$ gelten und für alle Transitionen $t \in \bullet s_1$ und alle Transitionen $t' \in s_1\bullet$ die Beziehungen $V(t,s_1) = V(t,s_2)$ und $V(s_1,t') = V(s_2,t')$ gelten.*

ii) Zwei Transitionen t_1 und t_2 heißen parallel im Netz N, wenn $t_1^- = t_2^-$ und $t_1{}^+ = t_2{}^+$ gelten.

Parallele Knoten sind also in der gleichen Weise und mit gleichen Gewichten mit den restlichen Knoten des Netzes verbunden. Beim Schalten einer Transition aus dem Vorbereich zweier paralleler Stellen, werden daher auf jede der parallelen Stellen die gleiche

Anzahl von Marken gelegt; beim Schalten einer Transition aus dem Nachbereich zweier paralleler Stellen, werden jeder der parallelen Stellen die gleiche Anzahl von Marken entzogen. Bei parallelen Transitionen t_1 und t_2 gilt, dass t_1 genau dann aktiviert ist, wenn auch t_2 aktiviert ist; überdies wird durch das Schalten von t_1 und t_2 aus einer Markierung m die gleiche Markierung m' erreicht, d.h. $m\,[t_1 > m'$ gilt genau dann, wenn $m\,[t_2 > m'$ gilt.

Regel 3:

Voraussetzung:	*Es gibt im Netz parallele Knoten x und y. Wenn x und y Stellen sind, so sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $m_0(x) \leq m_0(y)$.*
Anwendung:	*Streiche den Knoten y.*

Ein Beispiel für die Anwendung der Regel 3 (für parallele Stellen) ist in Abbildung 3.10 gegeben, wobei die beiden in der Abbildung am weitesten links stehenden Stellen parallel sind.

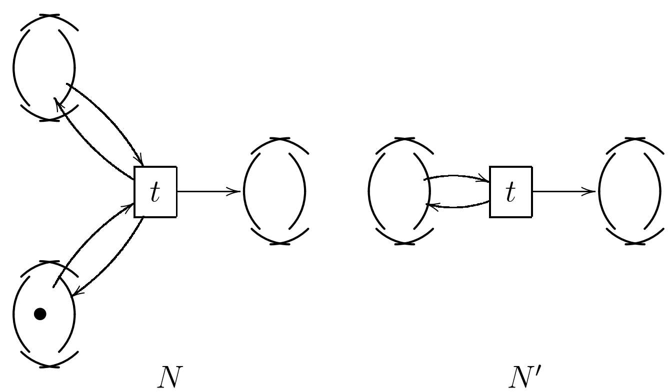


Abbildung 3.10: Beispiel zur Transformation durch Regel 3

Aufgrund der oben gemachten Bemerkungen über das Verhalten paralleler Knoten erhalten wir sofort die folgenden Aussagen.

Lemma 3.54 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 3. Sind x und y Stellen, so ist y genau dann beschränkt, wenn x beschränkt ist. Sind x und y Transitionen, so ist y genau dann lebendig, wenn x lebendig ist.* □

Satz 3.55 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 3.*
i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.
ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist. □

Aus Abbildung 3.10 ist auch zu sehen, dass es notwendig ist, die Stelle mit der größeren Anzahl von Marken zu streichen. Würde man nämlich in N die Stelle in der ersten Zeile streichen, so wäre N' unbeschränkt, während N beschränkt ist.

Definition 3.56 *Zwei Stellen s_1 und s_2 heißen äquivalent im Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$s_1\bullet = \{t_1\},\ \bullet s_1 \neq \emptyset,\ s_2\bullet = \{t_2\},\ \bullet s_1 \neq \emptyset,\ V(s_1,t_1) = V(s_2,t_2) = 1,$$
$$t_1^-(s) = t_2^-(s) \text{ für alle } s \in S \setminus \{s_1, s_2\},\ t_1^+(s) = t_2^+(s) \text{ für alle } s \in S.$$

Zwei Stellen sind äquivalent, wenn beide nichtleere Vorbereiche haben, ihre Nachbereiche einelementig sind und die Transitionen ihrer Nachbereiche mit den restlichen Knoten in gleicher Weise verbunden sind.

Es seien s_1 und s_2 zwei äquivalente Stellen. Ferner seien t_1 und t_2 die Transitionen aus den (einelementigen) Nachbereichen von s_1 bzw. s_2. Das Schalten von t_1 bzw. t_2 beeinflusst nicht das Schalten der jeweils anderen Transition. Da t_1 und t_2 mit den restlichen Knoten in gleicher Weise verbunden sind, kann das Schalten von t_2 durch das Schalten von t_1 ersetzt werden, wenn die Marken von s_2 auf s_1 umgeleitet werden können. Eine derartige Umleitung kann dadurch gewonnen werden, dass man anstelle von Kanten zu s_2 Kanten zu s_1 zusätzlich einführt. Dies führt zu der folgenden Regel.

Regel 4:
Voraussetzung: Es gibt im Netz N zwei äquivalente Plätze s_1 und s_2.
Anwendung:
1. Streiche die Knoten s_2 und t_2 (und die zugehörigen Kanten).
2. Setze $m'_o(s_1) = m_o(s_1) + m_0(s_2)$.
3. Wenn $(t, s_2) \in F$ und $(t, s_1) \notin F$, dann sei $(t, s_1) \in F'$ mit $V'(t, s_1) = V(t, s_2)$.
Wenn $(t, s_2) \in F$ und $(t, s_1) \in F$, dann sei $(t, s_1) \in F'$ mit $V'(t, s_1) = V(t, s_1) + V(t, s_2)$.
Wenn $(t, s_2) \notin F$ und $(t, s_1) \in F$, dann sei $(t, s_1) \in F'$ mit $V'(t, s_1) = V(t, s_1)$.
Wenn $(t, s_2) \notin F$ und $(t, s_1) \notin F$, dann sei $(t, s_1) \notin F'$.

Intuitiv werden bei der Regel 4 die Kanten zu s_2 in (zusätzliche) Kanten zu s_1 überführt, wobei die Gewichte – wenn nötig – addiert werden. Auch die Marken der Anfangsmarkierung werden von s_2 nach s_1 verschoben. Ein Beispiel für die Anwendung von Regel 4 ist in Abbildung 3.11 gegeben, wobei die beiden in N am weitesten links stehenden Stellen äquivalent sind und die untere gestrichen wird.

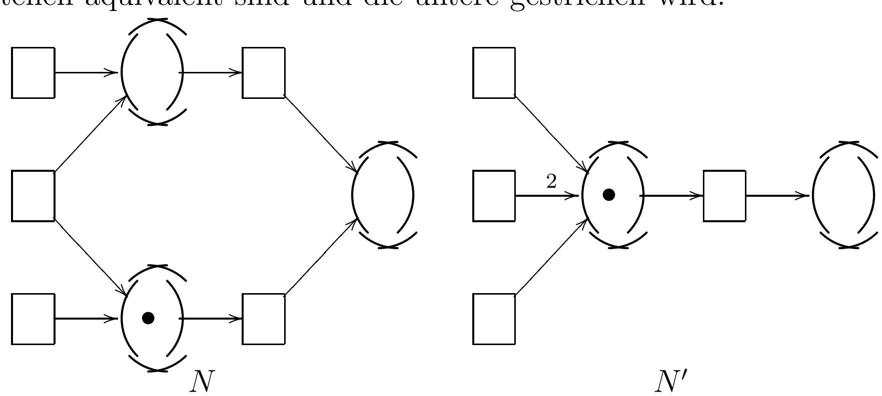


Abbildung 3.11: Beispiel zur Transformation durch Regel 4

Satz 3.57 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 4.*
i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.
ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist. □

Beweis. i) Es ist einfach zu sehen, dass die Markierung m in N genau dann erreichbar ist, wenn in N' die Markierung m' erreichbar ist, wobei

$$m'(s_1) = m(s_1) + m(s_2) \text{ und } m'(s) = m(s) \text{ für alle } s \in S \setminus \{s_1, s_2\} \tag{3.1}$$

gelten. Dies folgt einfach daraus, indem wir in der Schaltfolge, die m_0 in m in N überführt N' jedes t_2 durch t_1 in N' ersetzen. Umgekehrt gibt es auch zu jeder erreichbaren Markierung m' in N' eine erreichbare Markierung m in N derart, dass (3.1) erfüllt ist. Folglich ist N genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.

ii) Wir bemerken zuerst, dass wegen (3.1) von t_2 verschiedene Transitionen genau dann in N lebendig sind, wenn sie in N' lebendig sind.

Es sei N lebendig. Dann sind alle Transitionen in N lebendig. Damit sind auch alle Transitionen in N' lebendig, womit N' als lebendig nachgewiesen ist.

Es sei nun N nicht lebendig. Falls eine von t_2 verschiedene Transition in N nicht lebendig ist, so ist diese auch in N' nicht lebendig. Damit ist auch N' nicht lebendig. Falls t_2 in N nicht lebendig ist, so gibt es eine erreichbare Markierung m so, dass t bei keiner von m erreichbaren Markierung mehr geschaltet werden kann. Dies bedeutet, dass in N keine Marken mehr auf s_2 gebracht werden können. Daher können die Transitionen im Vorbereich von s_2 nicht mehr beliebig oft schalten. Folglich sind die Transitionen des Vorbereiches von s_2 auch nicht lebendig in N'. Diese sind dann auch in N' nicht lebendig. Erneut ist daher auch N' nicht lebendig. □

Die nachfolgenden Regeln sind derart, dass sie eine Stelle s und die Transitionen ihres Vor- und Nachbereiches streichen. Um trotzdem zu sichern, dass Marken von den Stellen aus den Vorbereichen der Transitionen aus $\bullet s$ zu den Stellen in den Nachbereichen der Transitionen aus $s\bullet$ gelangen können, werden zusätzlich neue Transitionen eingeführt.

Regel 5:

Voraussetzung: *Es gibt eine Stelle s und eine Zahl v mit folgenden Eigenschaften:*
$\bullet s = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \neq \emptyset$, $s\bullet = \{t'_1, t'_2, \ldots, t'_n\} \neq \emptyset$, $s \bullet \cap \bullet\, s = \emptyset$,
$V(s, t'_i) = v$ *und* $\bullet t'_i = \{s\}$ *für* $1 \leq i \leq n$, $t'_j\bullet \neq \emptyset$ *für ein* j, $1 \leq j \leq n$,
wenn $n = 1$ *ist, so ist* $V(t_i, s)$ *für* $1 \leq i \leq k$ *ein Vielfaches von* v,
wenn $n \geq 2$ *ist, so gelten* $m_0(s) \leq v$ *und* $V(t_i, s) = v$ *für* $1 \leq i \leq k$.

Anwendung:
1. *Wenn $m_0(s) \geq v$ ist, schalte Nachtransitionen von s solange, bis auf s weniger als v Marken liegen.*
2. *Streiche alle Knoten s, $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$.*
3. *Für alle i und j mit $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n$ führe neue Transitionen $t_{i,j}$ mit $t^-_{i,j} = t^-_i$ und $t^+_{i,j} = t^+_i + [t^+_i(s)/v](t'_j)^+$ ein.*

Wir bemerken zuerst, dass wir $k \cdot n$ neue Transitionen einführen, aber nur $k + n + 1$ Knoten löschen. Eine Vereinfachung – gemessen an der Gesamtzahl der Knoten – tritt daher nur ein, wenn $k = 1$ oder $n = 1$ oder $k = n = 2$ gilt.

Satz 3.58 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 5.*

i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.

ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Spezialfall $v = 1$. Die leichten Modifikationen für den allgemeinen Fall bleiben dem Leser überlassen.

Wenn $m_0(s) > 0$ ist, so ist $n = 1$. Dann kann t'_1 in N so oft geschaltet werden, bis auf s keine Marken mehr auf s liegen. Hierdurch ändert sich Beschränktheit und Lebendigkeit von N nicht.

Wir bemerken, dass ein Schalten von $t_{i,j}$ in N' einem Schalten von t_i und anschließendem $V(t_i, s)$-maligen Schalten von t'_j in N entspricht. Folglich ist t_i in N genau dann lebendig in N, wenn $t_{i,j}$ in N' lebendig ist.

Ferner, gibt es zu jeder Markierung m' von N' eine Markierung von m von N mit $m(s) = 0$ und $m(s') = m'(s')$ für jede Stelle s' aus $S \setminus \{s\}$, indem wir jedes Schalten von $t_{i,j}$ durch $t_i t'_j$ ersetzen (bei $n = 1$ wird $t_{i,1}$ durch $t_i(t'_1)^{V(t_1,s)}$ ersetzt). Es sei nun eine Markierung m in N gegeben. Wenn $m(s) = 0$ gilt, so ist m' mit $m'(s') = m(s)$ für $s' \in S \setminus \{s\}$ eine Markierung von N'. Falls $m(s) > 0$, so können wir die Marken von s auf Stellen im Nachbereich der Transitionen aus $\bullet s$ schalten (nach Voraussetzung existiert mindestens eine solche Stelle). Die daraus erhaltene Markierung m' ist auch eine Markierung von N' und enthält in der Summe über alle Stellen genauso viel Marken wie m. Damit folgt sofort, dass N genau dann beschränkt ist, wenn N' beschränkt ist.

Es sei nun N lebendig. Angenommen, N' ist nicht lebendig. Dann gibt es eine in N' von m'_0 aus durch eine Schaltfolge q' erreichbare Markierung m', bei der eine Transition $t' \in T'$ tot ist. Wir ersetzen in q' jedes Vorkommen von $t_{i,j}$ durch $t_i t'_j$ (bzw. $t_i(t'_1)^{V(t_1,s)}$ bei $n = 1$) ersetzt. Die dadurch entstehende Folge q ist eine Schaltfolge für m_0. Es sei $m_0 [q > m$. Dann stimmen m und m' auf den von s verschiedenen Stellen überein und es gilt $m(s) = 0$. Falls $t' \in T$ gilt, so ist t' auch bei m tot. Ist $t' = t_{i,j}$ für gewisse i und j, so ist t_i tot in N. In beiden Fällen haben wir einen Widerspruch zur vorausgesetzten Lebendigkeit von N.

Analog beweist man, dass die Lebendigkeit von N' die von N impliziert. □

Wir geben nun noch drei weitere Regeln und den zugehörigen Satz an, verzichten aber auf die Beweise. Die sechste Regel ist eine Modifikation von Regel 5 (es ist zugelassen, dass die Vorbereiche der Transitionen aus $s\bullet$ nicht einelementig sind), Regel 7 und Regel 8 streichen Stellen, deren Markierung durch Schalten einer beliebigen Transition nicht verändert wird, bzw. Transitionen, die nur in Schleifen vorkommen, durch deren Schalten also keine Änderung der Markierung vorgenommen wird.

Regel 6:

Voraussetzung: *Es gibt eine Stelle s, eine Transition t und eine natürliche Zahl v mit folgenden Eigenschaften:*
$\bullet s = \{t\}$, $s\bullet = \{t'_1, t'_2, \dots t'_n\} \neq \emptyset$, $\bullet s \cap s\bullet = \emptyset$,
$t\bullet = \{s\}$, $s'\bullet = \{t\}$ *für alle* $s' \in \bullet t$,
$V(s, t'_i)$, $1 \leq i \leq n$, *und* $V(t, s)$ *sind Vielfache von* v, $m_0(s) < v$.

Anwendung: *1. Streiche die Knoten $s, t, t'_1, t'_2, \dots, t'_n$*
2. Für alle j mit $1 \leq j \leq n$ führe eine neue Transition t_j mit
$t_j^- = t^- + (t'_j)^-$ *und* $t_j^+ = (t'_j)^+$ *ein.*

Satz 3.59 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 6.*
i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.
ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist. □

Regel 7:

Voraussetzung: *Es gibt eine Stelle s derart, dass $t^-(s) = t^+(s) \leq m_0(s)$ für alle Transitionen $t \in T$ gilt.*

Anwendung: *Streiche die Stelle s und alle Transitionen, die dadurch isoliert werden.*

Satz 3.60 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 7.*

i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.

ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist. □

Regel 8:

Voraussetzung:	*Es gibt Transitionen t und t', dass $t \neq t'$ und $(t')^- \geq t^- = t^+$ gelten.*
Anwendung:	*Streiche die Transition t.*

Satz 3.61 *Das Petri-Netz N' entstehe aus dem Petri-Netz N durch Anwendung der Regel 8.*

i) Das Netz N ist genau dann beschränkt, wenn N' beschränkt ist.

ii) Das Netz N ist genau dann lebendig, wenn N' lebendig ist. □

3.5 Invarianten

In diesem Abschnitt betrachten wir einige lineare Gleichungssysteme, die sich in natürlicher Weise aus dem Petri-Netz ergeben. Die Lösungen der Gleichungssysteme werden wir als Invarianten bezeichnen. Dabei werden wir die Gleichungssysteme so wählen, dass die Invarianten als gewichteten Transitionen bzw. Stellen angesehen werden können.

In diesem Abschnitt wollen wir stets voraussetzen, dass für das Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$

$$S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\} \text{ und } T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$$

mit $n \geq 1$ und $k \geq$ gelten.

Wir haben schon im Abschnitt über die Grundbegriffe festgestellt, dass bei $m\,[q > m'$ die Gleichung

$$m' = m + \pi(q)I(N)$$

gilt, wobei $I(N)$ die Inzidenzmatrix von N und $\pi(q)$ der Parikhvektor von q sind. Diese Schreibweise geht davon aus, dass alle betrachteten Vektoren Zeilenvektoren sind. In der linearen Algebra werden aber üblicherweise Spaltenvektoren bei Gleichungssystemen verwendet. Daher schreiben wir die obige Gleichheit in der Form

$$(m')^T = m^T + I(N)^T \pi(q)^T,$$

die durch einfaches Transponieren entsteht. Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen setzen wir

$$C(N) = I(N)^T$$

und bezeichnen diese Matrix als Akzidenzmatrix. Damit ergibt sich $(m')^T = m^T + C(N)\pi(q)^T$. Die Matrix $C(N)$ ist entsprechend der Definition von $I(N)$ eine (n, k)-Matrix (mit n Zeilen und k Spalten) und ihre i-te Spalte ist der Spaltenvektor $\Delta(t_i)^T$. Falls das Petri-Netz N aus dem Zusammenhang eindeutig festliegt, schreiben wir einfach C anstelle von $C(N)$ und I anstelle von $I(N)$.

Definition 3.62 *Es sei ein Petri-Netz N gegeben.*

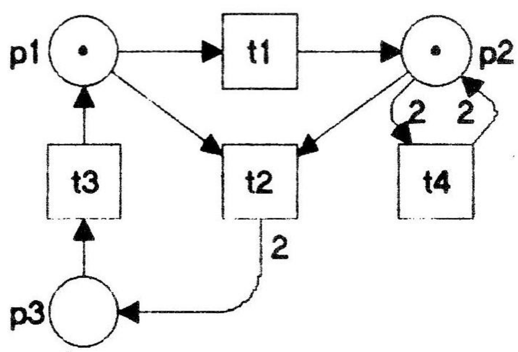
i) Jede nicht-triviale ganzzahlige Lösung x des homogenen linearen Gleichungssystems $Cx = 0$ wird Transitionsinvariante *(oder kurz* T-Invariante*) von N genannt.*

ii) Eine T-Invariante ist eine echte *T-Invariante, wenn x keine negative Komponente hat (also wenn $x \geq 0$ gilt).*

iii) Eine T-Invariante heißt realisierbar*, wenn es ein Wort $q \in T^*$ und eine in N erreichbare Markierung $m \in R(N, m_0)$ derart gibt, dass $x = \pi(q)^T$ gilt und q eine Schaltfolge für m ist.*

iv) Wir nennen das Netz N von T-Invarianten überdeckt*, wenn es eine T-Invariante x gibt, deren Komponenten alle positiv sind.*

Beispiel 3.63 Wir betrachten das Petri-Netz N_8, das in Abbildung 3.12 mit seiner Akzidenzmatrix gegeben ist.



$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.12: Petri-Netz N_8

Wie man leicht ausrechnet, sind die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T-Invarianten sind. Daüberhinaus ist x_1 keine echte T-Invariante, während x_2, x_3 und x_4 echt sind. Die Invarianten x_2 und x_3 sind überdies auch realisierbar, denn die Wörter $t_2 t_3^2 t_1$ bzw. t_4 sind Schaltfolgen für die Anfangsmarkierung bzw. die durch Schalten von t_1 erreichbare Markierung und ihre Parikhvektoren sind x_2 bzw. x_3.

Der Vektor x_4 ist nicht realisierbar. Wir nehmen an, x_4 wäre realisierbar durch die Schaltfolge q. Es ist leicht zu sehen, dass im Netz stets zwei Marken vorhanden sind. Die Transition t_4 ist nur aktiviert, wenn auf p_2 mindestens zwei Marken liegen. Dann kann aber keine der anderen Transitionen schalten und ein Schalten von t_4 ändert die Markierung nicht. Folglich muss t_4 der letzte Buchstabe von q sein. Da t_2 vorkommen muss, ist danach mindestens ein zweimaliges Schalten von t_1 erforderlich, um zwei Marken auf p_2 zu bringen. Da q aber t_1 nur einmal enthalten kann, erhalten wir einen Widerspruch.

Das Netz ist von T-Invarianten überdeckt, da die T-Invariante x_4 nur positive Komponenten besitzt.

Falls x eine realisierbare T-Invariante ist, so gilt für eine zu y gehörige Schaltfolge q wegen $C\pi(q)^T = 0$ die Beziehung $m^T + C\pi(q)^T = m^T$ für eine erreichbare Markierung m. Die Folge q realisiert also einen Kreis im Erreichbarkeitsgraphen. Folglich können die echten T-Invarianten als mögliche Kreise aufgefasst werden.

Satz 3.64 *Es seien x und x' zwei T-Invarianten eines Netzes N. Ferner sei d ein Teiler des größten gemeinsame Teiler der Komponenten von x und α und α' zwei ganze Zahlen. Dann sind $(1/d)x$ und $\alpha x + \alpha' x'$ ebenfalls T-Invarianten von N.*

Beweis. Es ist aus der linearen Algebra bekannt, dass $(1/d)x$ und $\alpha x + \alpha' x'$ Lösungen des Gleichungssystems mit der Koeefizientenmatrix C sind. Durch die Voraussetzungen ist überdies abgesichert, dass die Komponenten von $(1/d)x$ und $\alpha x + \alpha' x'$ ganzzahlig sind. Damit sind $(1/d)x$ und $\alpha x + \alpha' x'$ T-Invarianten. $\square$

Offensichtlich kann (durch vollständige Induktion) bewiesen werden, dass jede Linearkombination von T-Invarianten mit ganzzahligen Komponenten wieder eine T-Invariante ist. Im Folgenden verwenden wir den Begriff der Linearkombination so dass wir Linearkombinationen mit nicht-negativen Koeffizienten und Divisionen durch Teiler des größten gemeinsamen Teilers der Komponenten zulassen.

Satz 3.65 *Wenn das Netz bei irgendeiner Markierung m lebendig und beschränkt ist, so ist N von T-Invarianten überdeckt.*

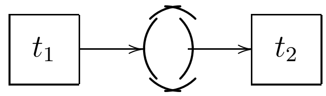
Beweis. Es sei N lebendig bei m. Dann gibt es eine von m aus erreichbare Markierung m_1, bei der t_1 aktiviert ist. Es sei q_1 die Schaltfolge mit $m\,[q_1 > m_1$. Es sei m_1' die Markierung, die durch Anwendung von t_1 auf m_1 entsteht. Wegen der Lebendigkeit von N gibt es eine von m_1' erreichbare Markierung m_2, bei der t_2 aktiviert ist. Es sei $m_1'\,[q_2 > m_2$. Dann ist $q_1t_1q_2t_2$ eine Schaltfolge für m. Durch deren Anwendung entstehe m_2'. Wir können analog fortfahren und erreichen eine Schaltfolge $p_1 = q_1t_1q_2t_2 \dots q_kt_k$ für m, in der jede Transition mindestens einmal vorkommt. Durch Anwendung der Folge erreichen wir $m + \Delta(p_1)$. Auch für diese Markierung können wir wie oben eine Schaltfolge p_2 konstruieren, in der alle Transitionen vorkommen. Analog fahren wir für $m + \Delta(p_1p_2)$ fort. Auf diese Weise erhalten wir für jede natürliche Zahl r eine Folge von Markierungen mit

$$m\,[p_1 > m + \Delta(p_1)\,[p_2 > m + \Delta(p_1p_2)\,[p_3 > \dots\,[p_r > m + \Delta(p_1p_2 \dots p_r)\,.$$

Wegen der Beschränktheit von N ist $R(N, m)$ endlich. Es seien s Elemente in $R(N, m)$. Wenn wir $r > s$ wählen, so gibt es zwei Zahlen i und j mit $i < j$ und $m + \Delta(p_1p_2 \dots p_i) = m + \Delta(p_1p_2 \dots p_j)$. Daher gilt $\Delta(p_{i+1}p_{i+2} \dots p_j) = 0$. Folglich ist $x = \pi(p_{i+1}p_{i+2} \dots p_j)^T$ eine T-Invariante. Da p_j jede Transition mindestens einmal enthält, ist jede Komponente von x positiv. Damit wird N von T-Invarianten überdeckt. $\square$

Die Umkehrung von Satz 3.65 gilt nicht. Dazu betrachten wir zuerst das Netz N_8 aus Abbildung 3.12. Dieses Netz besitzt die T-Invariante $(1, 1, 2, 1)^T$ und ist beschränkt, wie wir in Beispiel 3.63 festgestellt haben. Es ist aber nicht lebendig, weil wir von jeder erreichbaren Markierung die Markierung $(0, 2, 0)$ erreichen können, in der t_1, t_2 und t_3 tot sind.

Außerdem ist das Netz N_9



lebendig und nicht beschränkt, denn wir können beliebig viele Marken auf die einzige Stelle des Netzes schalten. Außerdem ist N_9 überdeckt von T-Invarianten, denn es besitzt die Akzidenzmatrix $C = (1, -1)$ und damit die T-Invariante $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir kommen nun zum analogen Begriff für Stellen.

Definition 3.66 *Es sei ein Petri-Netz N gegeben.*

i) Jede nicht-triviale ganzzahlige Lösung y des homogenen linearen Gleichungssystems $Iy = 0$ wird Stelleninvariante *(oder kurz* S-Invariante*) von N genannt.*

ii) Eine S-Invariante ist eine echte *S-Invariante, wenn y keine negative Komponente hat (also wenn $y \geq 0$ gilt).*

iii) Wir nennen das Netz N von S-Invarianten überdeckt*, wenn es eine S-Invariante y gibt, deren Komponenten alle positiv sind.*

Wir bemerken, dass $(y^T C)^T = C^T y$ ist. Folglich können wir unter Verwendung des Zeilenvektors y^T die S-Invarianten auch mittels C definieren.

Beispiel 3.67 *(Fortsetzung von Beispiel 3.63)* Wir betrachten wieder das Netz N_8 aus Beispiel 3.63. Die Inzidenzmatrix ist offensichtlich

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nachzurechnen, dass die Lösungen des Gleichungssystems $Iy = 0$ alle von der Form $(a, a, a)^T$ mit einer ganzen Zahl a sind.

Damit ist N von S-Invarianten überdeckt.

Satz 3.68 *Es sei y eine S-Invariante des Netzes N. Dann gilt für jede von m_0 erreichbare Markierung m die Beziehung $m \cdot y = m_0 \cdot y$ (wobei die Multiplikation auch als Skalarprodukt aufgefasst werden kann).*

Beweis. Es sei $q \in T^*$ eine Schaltfolge mit $m_0\,[q > m$. Dann ist $m = m_0 + \pi(q)I$. Damit erhalten wir

$$m \cdot y = (m_0 + \pi(q)I)y) = m_0 \cdot y + \pi(q)(Iy) = m_0 \cdot y + \pi(q) \cdot 0 = m_0 \cdot y\,.$$

□

Aus Satz 3.68 ergibt sich sofort das folgende Kriterium für Nichterreichbarkeit einer Markierung.

Folgerung 3.69 *Wenn es eine S-Invariante y des Netzes N gibt, für die $m \cdot y \neq m_0 \cdot y$ gilt, so ist $m \notin R(N, m_0)$.*

Die Umkehrung von Satz 3.68 gilt im Allgemeinen nicht, aber sie ist für lebendige Netzes richtig.

Satz 3.70 *Wenn in einem lebendigen Netz N für jede Markierung $m \in R(N, m_0)$ die Beziehung $m \cdot y = m_0 \cdot y$ gilt, so ist y eine S-Invariante von N.*

Beweis. Es sei t eine Transition von N. Weil N lebendig ist, gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$, bei der t aktiviert ist. Daher ist auch $m + \Delta(t)$ erreichbar. Damit gilt $m \cdot y = (m + \Delta(t)) \cdot y = m_0 \cdot y$. Hieraus folgt sofort $\Delta(t) \cdot y = 0$. Da die $\Delta(t)$ die Zeilen von I sind, erhalten wir $Iy = 0$, womit y eine S-Invariante ist. □

Satz 3.71 *i) Ist y eine echte S-Invariante von N und $y(s) > 0$ für eine Stelle s, so ist die Stelle s in jedem Netz (S, T, F, V, m) (d.h. bei jeder Anfangsmarkierung) beschränkt.*

ii) Wenn N durch S-Invarianten überdeckt wird, dann ist das Netz (S, T, F, V, m) für jede Markierung m beschränkt.

Beweis. i) Es sei s' eine beliebige Stelle des Netzes. Wegen Satz 3.68 gilt $m \cdot y = m' \cdot y \geq m'(s')y(s')$ für jede von m erreichbare Markierung m'. Nach Voraussetzung ist $y(s) > 0$ für eins$\in S$. Damit erhalten wir $m'(s) \leq m \cdot y$. Folglich liegen auf der Stelle s bei m' höchstens $m \cdot y$ Marken. Damit ist s bei m' beschränkt.

ii) folgt sofort aus i). □

Die Umkehrung von Satz 3.71 gilt im Allgemeinen nicht, denn $(\{s\}, \{t\}, \{(s, t)\}, V, m_0)$ ist bei beliebiger Anfangsmarkierung m_0 beschränkt (da t nur so oft schalten kann bis auf s weniger als $V(s, t)$ Marken liegen), hat aber keine S-Invariante (da das Gleichungssystem $V(s, t) \cdot y = 0$ nur die triviale Lösung besitzt).

Definition 3.72 *Ein Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ heißt* strukturell beschränkt, *wenn (S, T, F, V, m) für jede Markierung m beschränkt ist.*

Bei einem strukturell beschränkten Netz ist also die Eigenschaft beschränkt zu sein, nicht von der gewählten Anfangsmarkierung abhängig.

Wir zeigen nun, dass Satz 3.71 für lebendige Netze umkehrbar ist.

Satz 3.73 *Es sei N ein Petri-Netz, das eine lebendige Markierung besitzt. Dann ist N genau dann von S-Invarianten überdeckt, wenn N strukturell beschränkt ist.*

Beweis. Wegen Satz 3.71 ii) haben wir nur zu zeigen, dass ein strukturell beschränktes Netz mit einer lebendigen Markierung von S-Invarianten überdeckt ist, d.h. wir müssen nachweisen, dass es eine Lösung des Gleichungssystems $Iy = 0$, die nur positive Komponenten hat. Für y muss also $y \geq 0$ gelten, aber dies sichert noch nicht, dass alle Komponenten von y auch positiv sind. Diese Forderung lässt sich als Gleichung wie folgt formulieren: Für jedes i, $1 \leq i \leq n$, sei b_i der Zeilenvektor mit n Komponenten, dessen i-te Komponente 1 und dessen verbleibende Komponenten alle 0 sind. Dann muss $b_i \cdot y > 0$ für $1 \leq i \leq n$ sein. Durch Addition der Lösungen der Gleichungssysteme Wir nehmen nun an, dass das Ungleichungssystem

$$Iy = 0, \; y \geq 0 \text{ und } b_i y > 0$$

für ein i keine Lösung hat. Nach dem Satz von Farkas[1] hat dann das Ungleichungssystem $Cx \geq b_i$ eine Lösung x_0 (man beachte dass durch Transponieren der Inzidenzmatrix die Akzidenzmatrix entsteht). Die Lösung x_0 kann negative Komponenten enthalten. Wir zeigen nun, dass sogar eine Lösung existiert, die in allen Komponenten positiv ist. Dazu sei k der maximale Absolutbetrag der Komponenten von x_0. Nach Satz 3.65 ist N von T-Invarianten überdeckt. Dies bedeutet, dass das Gleichungssystem $Cx = 0$ eine Lösung x_1 besitzt, deren Komponenten alle positiv sind. Da jede Komponente von x_1 mindestens 1 ist, folgt, dass alle Komponenten von $x_2 = x_0 + (k+1)x_1$ positiv sind. Da noch

$$Cx_2 = C(x_0 + (k+1)x_1 = Cx_0 + (k+1)Cx_1 = Cx_0 \geq b_i$$

gilt, haben wir in x_2 eine Lösung von $Cx \geq b$ gefunden, deren Komponenten alle positiv sind.

Wir wählen nun die Anfangsmarkierung

$$m^* = \sum_{i=1} x_2(i)t_i^- .$$

Durch diese Wahl ist abgesichert, dass wir jede Transition t_i so oft schalten können, wie $x_2(i)$ angibt. Damit gibt es eine Schaltfolge q mit $\pi(q)^T = x_2$. Durch Schalten von q erhalten wir die Markierung

$$m_1 = m^* + \Delta(q) = m^* + \pi(q)I.$$

Wegen

$$\pi(q)I = x_2^T C^T = (Cx_2)^T \geq b_i^T > 0$$

gilt $m_1 > m^*$. Folglich können wir q auch auf m_1 anwenden und erhalten m_2 mit $m_2 > m_1 > m^*$. So fortfahrend konstruieren wir eine Markierung, die auf mindestens einer Stelle mehr Marken als jede vorgegebene Schranke enthält. Somit ist N bei der Anfangsmarkierung m^* nicht beschränkt. Dies widerspricht der vorausgesetzten strukturellen Beschränktheit von N. □

Wir haben oben gesehen, dass T-Invarianten (und dies gilt für S-Invarianten in gleicher Weise) abgeschlossen gegenüber Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten und Divisionen durch den größten gemeinsamen Teiler aller Komponenten abgeschlossen sind. Um alle T- bzw. S-Invarianten zu beschreiben/zu erzeugen, wäre es wünschenswert ein Pendant zur Basis aus der üblichen linearen Algebra zu haben. Ein solches Konzept wird nun definiert.

Definition 3.74 *Es sei x ein Vektor ohne negative Komponenten. Dann bezeichnen wir mit supp(x) die Menge der Komponenten, für die der Wert positiv ist. Die Menge supp(x) heißt* Träger *von x.*

[1] Der Satz von Farkas aus der Theoorie der Ungleichungssysteme bzw. der linearen ganzzahligen Optimierung lautet wie folgt: *Ist C eine ganzzahlige Matrix und b ein ganzzahliger Spaltenvektor. Dann ist das Ungleichungssystem $I^T x \geq b$ genau dann ganzzahlig lösbar, wenn das Ungleichungssystem $Cy = 0$, $y \geq 0$, $b^T y > 0$ nicht ganzzahlig lösbar ist.* Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [?].

Im Fall der echten S-Invarianten y entspricht jede Komponente einer Stelle. Dadurch ist der Träger einer echten S-Invarianten durch die Menge der Stellen s gegeben, für die $y(s) > 0$ gilt.

Definition 3.75 *Eine echte S-Invariante (bzw. T-Invariante) y heißt* minimal*, wenn es keine echte S-Invariante (bzw. T-Invariante) y' mit supp$(y') \subset$ supp(y) gibt.*

Die Minimalität der Invariante bezieht sich also darauf, dass der Träger minimal ausfällt.

Wir zeigen nun, dass die minimalen Invarianten als eine Art Basis für die Menge aller Invarianten angesehen werden können.

Satz 3.76 *Jede echte S-Invariante eines Netzes N kann aus den minimalen S-Invarianten linear kombiniert werden.*

Beweis. Es sei y eine echte S-Invariante. Wenn y minimal ist, so kombinieren wir y aus y mit dem Koeffizienten 1. Wenn y nicht minimal ist, so sei y' eine minimale S-Invariante mit *supp*$(y') \subset$ *supp*(y). Wir wählen nun s' (die Komponenten von S-Invarianten entsprechen Stellen) derart, dass $y(s')/y'(s')$ minimal unter den Werten $y(s)/y'(s)$ mit $s \in S$ (dabei wird $z/0 = \omega$ für alle $z \geq 0$ angenommen) ausfällt. Nun betrachten wir den Vektor

$$y'' = y'(s')y - y(s')y'.$$

Da $y'(s')$ und $y(s')$ nicht-negative Zahlen sind, ist y'' eine S-Invariante (siehe Satz 3.64). Wenn $y''(s'') < 0$ für ein $s'' \in S$ ist, so gilt

$$y''(s'') = y'(s')y(s'') - y(s')y'(s'') < 0,$$

woraus $y'(s')y(s'') < y(s')y'(s'')$ resultiert. Damit haben wir $y(s'')/y'(s'') < y(s')/y'(s')$ im Gegensatz zur Wahl von s'. Folglich ist y'' sogar eine echte S-Invariante. Falls $s \notin$ *supp*(y) ist, so ist wegen *supp*$(y') \subset$ *supp*(y) auch $s \notin$ *supp*(y'). Damit haben wir $y(s) = y'(s) = 0$, woraus auch $y''(s) = 0$ folgt. Somit gilt *supp*$(y'') \subset$ *supp*(y).

$$y''(s') = y'(s')y(s') - y(s')y'(s') = 0.$$

Daher haben wir *supp*$(y'') \subset$ *supp*(y).

Nach Konstruktion ist $y'(s')y = y'' + y(s')y'$. Damit können wir y aus der Linearkombination $y'' + y(s')y'$ mit positiven Koeffizienten mittels Division durch $y'(s')$ gewonnen werden. Da jede Komponente von $y'' + y(s')y'$ den Faktor $y'(s)$ enthält. Damit lässt sich y als Linearkombination aus y' und y'' gewinnen.

Sollte y'' minimal sein, sind wir fertig, anderenfalls wiederholen wir die Konstruktion für y''. Nach endlich vielen Schritten muss sich aber eine minimale S-Invariante ergeben, da der Träger immer echt kleiner wird. □

Satz 3.77 *Minimale S-Invarianten mit den gleichen Träger sind linear abhängig.*

Beweis. Es seien y und y' zwei minimale S-Invarianten mit gleichem Träger. Wir wählen wieder wie im Beweis von i) eine Stelle s' derart, dass $y(s')/y'(s')$ ausfällt. Da $y(s')/y'(s')$ eine rationale Zahl gibt es positive natürliche Zahlen r und s mit $y(s')/y'(s') = r/s$ und größtem gemeinsamen Teiler 1. Wir konstruieren $y'' = sy - ry'$. Wie im Beweis von i) können wir zeigen, dass y'' eine Lösung von $Iy = 0$ ist und $supp(y'') \subset supp(y)$ gilt. Da y eine minimale S-Invariante ist, kann y'' keine S-Invariante sein. Daher muss y'' die triviale Lösung von $Iy = 0$, d.h. $y'' = 0$ sein. Damit gilt $sy = ry'$. Da r und s keinen gemeinsamen Teiler haben, müssen alle Komponenten von y' durch s teilbar sein. Damit ist s ein Teiler des größten gemeinsamen Teilers der Komponenten von y'. Folglich ist $y = r(\frac{1}{s}y')$, womit die lineare Abhängigkeit im hier verwendeten Sinn gegeben ist. □

Wir geben nun ein Verfahren zur Bestimmung der minimalen S-Invarianten an.

Dazu bilden wir zuerst die Akzidenzmatrix $C(N)$ (vom Typ (n, k)) und hängen daran rechts n Spalten, die die Einheitsmatrix bilden. Diese Matrix vom Typ $(n, n+k)$ sei D_0.

Es sei die Matrix D_i schon konstruiert. Dann bilden wir die Matrix D_{i+1} in der folgenden Weise: Zuerst bilden wir für je zwei Zeilen z_1 und z_2 aus D_i mit $z_1(i) \cdot z_2(i) < 0$ (d.h. die i-ten Elemente der beiden Zeilen haben unterschiedliches Vorzeichen und sind von Null verschieden) die neue Zeile

$$z' = |z_1(i)|z_2 + |z_2(i)|z_1,$$

dividieren z' durch den größten gemeinsamen Teiler seiner Komponenten und hängen den so erhalten Zeilenvektor unten an die Matrix D_i an. Offensichtlich gilt $z(i) = 0$. Wenn dies für alle Paare von Zeilen geschehen ist, streichen wir in der Matrix alle Zeilen mit w mit $w(i) \neq 0$ und erhalten D_{i+1}.

Offensichtlich sind in D_1 alle Elemente der ersten Spalte 0, in der Matrix D_2 alle Elemente der beiden ersten Spalten 0 usw. Dieses Verfahren ähnelt also dem bekannten Eliminierungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme (nur werden hier die Zeilen mit $w(i) \neq 0$ noch gestrichen).

Wir brechen das Verfahren mit D_k ab. Die Matrix D_k hat in den ersten k Spalten nur Nullen. Wir streichen diese Spalten und erhalten eine (n, n)-Matrix D.

Der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben, gibt eine Charakterisierung der minimalen S-Invarianten.

Satz 3.78 *Es sei N ein Petri-Netz und D die nach obigem Algorithmus aus $C(N)$ gebildete Matrix.*

i) Jede Zeile von D ist eine S-Invariante von N.

ii) Jede minimale S-Invariante, deren Komponenten den größten gemeinsamen Teiler 1 haben, ist als Zeile in D enthalten. □

Wir konstruieren nun als Beispiel die Matrix D für das Netz N_8 aus Abbildung 3.12. Wir gehen von

$$D_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus und erhalten der Reihe nach

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_2 = D_3 = D_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach den Sätzen 3.78, 3.71 und 3.73 ist damit der Vektor $(1,1,1)^T$ die einzige S-Invariante, deren größter gemeinsamer Teiler der Komponenten 1 ist und die Menge aller S-Invarianten besteht aus allen Vektoren $(a,a,a)^T$ mit einer ganzen Zahl a (wir bilden Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten). Dies entspricht unserem Ergebnis aus Beispiel 3.67.

Wir merken aber an, dass die Anzahl der minimalen S-Invarianten mit paarweise verschiedenem Träger (und größtem gemeinsamen Teiler 1 der Komponenten) exponentiell in der Anzahl der Stellen und Transitionen sein kann. Daher hat der oben angegebene Algorithmus zur Bestimmung der minimalen S-Invarianten mindestens exponentielle Zeitkomplexität.

3.6 Fairness und Synchronie

Wir betrachten das Petri-Netz aus Abbildung 1.5, das fünf Philosophen beim Dinner beschreibt. Für $0 \le i \le 4$ sind die Stellen g_i, p_iE und p_iD genau dann markiert, wenn die i-te Gabel auf dem Tisch liegt, der i-te Philosoph isst bzw. der i-te Philosoph denkt und die Transitionen n_i und h_i beschreiben den Übergang vom Denken zum Essen bzw. vom Essen zum Denken für den i-ten Philosophen. Die in Abbildung 1.5 gegebene Anfangsmarkierung beschreibt also die Situation, bei der der zweite Philosoph isst, während alle anderen Philosophen denken. Ausgehend von dieser Situation sind die folgenden unendlichen Folgen von Transitionen schaltbar:

$$w_1 = (n_0h_2n_2h_0)(n_0h_2n_2h_0)(n_0h_2n_2h_0)\cdots = (n_0h_2n_2h_0)^\omega, \tag{3.2}$$

$$w_2 = (n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)(n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)\cdots = (n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)^\omega, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} w_3 = {} & (h_2n_0n_2h_0)(n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)(h_2n_0n_2h_0)^2(n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4) \\ & (h_2n_0n_2h_0)^3(n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)(h_2n_0n_2h_0)^4(n_0h_2n_3h_0n_1h_3n_4h_1n_2h_4)\ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Bei der ersten Folge w_1 essen nur der nullte und der zweite Philosoph. Der dritte und vierte Philosoph haben zwar unendlich oft die Chance zum Essen, aber sie wird ihnen stets durch den nullten bzw. zweiten Philosophen genommen. Der erste Philosoph dagegen hat nicht einmal die Chance, zwei Gabeln aufzunehmen. Dies bedeutet, dass drei der Philosophen denkend verhungern müssen. Das Verhalten von den beiden essenden Philosophen kann nicht als fair oder gerecht bezeichnet werden.

Bei der zweiten Folge ist die Situation völlig anders. Jeder der Philosophen kann die Chance zum Essen auch nutzen und isst während des Ablaufs der Folge sogar „unendlich“ oft. Dieser Ablauf benachteiligt keinen Philosophen, ist also gerecht/fair.