# Logik für Bachelor

## Übungsblatt 7
## (für die 49. Kalenderwoche)

*zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow*
*im Wintersemester 2008/2009*

Magdeburg, 25. November 2008

1. Geben Sie die Definition der Begriffe
   - Alphabet und Signatur einer prädikatenlogischen Sprache (erster Stufe),
   - Menge der Terme über einer Signatur,
   - Menge der prädikatenlogischen Ausdrücke über einer Signatur.

2. Gegeben sei die Signatur $\mathcal{S}$ mit $R_1 = \{r\}$, $F_2 = \{f\}$ und $K = F_1 = R_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$.
   a) Bestimmen Sie alle Terme $t$ über $\mathcal{S}$, deren Länge (als Wort betrachtet) höchstens 20 ist und die als Variable nur $x$ enthalten.
   b) Bestimmen Sie über der Variablenmenge var $= \{x, y\}$ alle Terme $t$ über $\mathcal{S}$, deren Länge (als Wort betrachtet) höchstens 12 ist.
   c) Welche Ausdrücke gibt es über $\mathcal{S}$ über der Variablenmenge var $= \{x, y\}$, deren Länge (als Wort betrachtet) höchstens 14 ist?

3. Es sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer prädikatenlogischen Sprache. Geben Sie die Definition der Begriffe
   - Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Belegung bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Terms bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung $\alpha$,
   - Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks bez. einer Interpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{S}$ und einer Belegung $\alpha$.

4. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \tau(c) &= 2, & \tau(f) &= F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad F(n) = n^2, \\ \tau(r_1) &= \{m \mid m \geq 10\}, & \tau(r_2) &= R_< = \{(n, m) \mid n < m\} \end{aligned}$$

   und die Belegung $\alpha$ bez. $I$ mit $\alpha(x) = 2$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke
   a) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   b) $A = \forall x(r_1(f(c)) \vee r_2(x, f(x)))$,
   c) $A = \exists x(r_2(f(c), x) \wedge \neg r_2(x, f(x)))$.
   d) $A = (\exists x r_2(f(c), x) \wedge \exists x \neg r_2(x, f(x)))$.

5. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \{a, b\}^*$ und

$$\begin{aligned} &\tau(c) = ab, \\ &\tau(f) = F\colon \{a, b\}^* \to \{a, b\}^* \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \begin{cases} aau' & \text{für } u = au', \\ u & \text{sonst,} \end{cases} \\ &\tau(r_1) = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ beginnt mit } a\}, \\ &\tau(r_2) = \{(u, v) \mid |u| \leq |v|\} \end{aligned}$$

   sowie die Belegung $\alpha$ bez. $I$ mit $\alpha(x) = bb$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke
   a) $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   b) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
   c) $A = \forall x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
   d) $A = \exists x(r_1(f(x)) \wedge r_2(f(x), x))$.
   e) $A = (\exists x r_1(f(x)) \wedge \exists x r_2(f(x), x))$.